

Séries à termes dans un evn de dimension finie

Cours	2
1 Séries à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie	2
1.1 Somme partielle, convergence, divergence, somme, reste d'une série convergente	2
1.2 Divergence grossière	2
1.3 Opérations	2
1.4 Caractérisation par les coordonnées dans une base	3
1.5 Convergence absolue	3
2 Application : séries de matrices, séries d'endomorphismes	3
2.1 Exponentielle de matrice, d'endomorphisme en dimension finie	3
2.2 Exemples	4
2.3 Propriétés	4
3 Annexe : pourquoi la convergence absolue implique la convergence	5
Exercices	5
Exercices et résultats classiques à connaître	5
Exponentielle d'une matrice antisymétrique	5
Déterminant de l'exponentielle d'une matrice	5
L'exponentielle d'une matrice est un polynôme de cette matrice	5
Exercices du CCINP	6
Exercices	6
Petits problèmes d'entraînement	7

On reprend essentiellement dans ce chapitre la théorie des séries numériques, et on l'adapte aux evn. Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$.

1 Séries à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie

1.1 Somme partielle, convergence, divergence, somme, reste d'une série convergente

Définition. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On s'intéresse à la série $\sum u_n$.

- $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est la **somme partielle** d'ordre n .
- La série $\sum u_n$ **converge** lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel normé E , c'est-à-dire s'il existe $S \in E$ tel que :

$$\left\| \sum_{k=0}^n u_k - S \right\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On dit qu'elle **diverge** sinon.

- En cas de convergence, on appelle **somme de la série**, et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, la limite de la suite des sommes partielles.

Remarque. Étudier une série, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

Définition. Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on peut définir son **reste** d'ordre n , avec les notations précédentes :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Proposition. La suite des restes est bien définie lorsque $\sum u_n$ converge, et $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

1.2 Divergence grossière

Proposition. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 0

Remarque. Il s'agit d'une condition nécessaire.

Définition. Lorsque $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

1.3 Opérations

Proposition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes, λ et μ deux scalaires. Alors la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Corollaire. L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, et l'application $\sum u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ y est linéaire.

Lien suite-série. Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans E . On a :

$$\text{la suite } (u_n)_n \text{ converge} \iff \text{la série } \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

Proposition. La convergence et la valeur de la somme d'une série convergente est indépendante du choix de la norme sur E qui est de dimension finie.

1.4 Caractérisation par les coordonnées dans une base

Définition. Soit $\sum u_n$ une série à termes dans E , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$u_n = u_n^{(1)}e_1 + \dots + u_n^{(p)}e_p = \sum_{i=1}^p u_n^{(i)}e_i$$

l'unique écriture de u_n comme C.L. de \mathcal{B} .

La suite $(u_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ s'appelle la i -ème suite coordonnée de $(u_n)_n$.

Proposition. Avec les notations précédentes,

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \forall i \in \{1, \dots, p\}, \sum u_n^{(i)} \text{ converge}$$

et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(1)} \right) e_1 + \dots + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)} \right) e_p = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(i)} \right) e_i$$

Remarque. La convergence de $\sum u_n$ est caractérisée par la convergence de ses séries coordonnées dans une base \mathcal{B} fixée.

1.5 Convergence absolue

Définition. Soit $\sum u_n$ une série à termes dans E . On dit que $\sum u_n$ **converge absolument** si et seulement si la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge.

Remarque. Lorsque $E = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , la norme la valeur absolue ou le module, et on retrouve bien la convergence absolue des séries numériques.

Remarque. On ne confondra pas la convergence absolue de $\sum u_n$ dans $(E, \|\cdot\|)$ evn de dimension finie, avec la convergence normale de $\sum f_n$ dans l'espace $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ des fonctions bornées, qui est la convergence de la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$.

Théorème.

Dans E espace vectoriel normé de dimension finie, si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve. Une justification est proposée en annexe. □

2 Application : séries de matrices, séries d'endomorphismes

2.1 Exponentielle de matrice, d'endomorphisme en dimension finie

Définition.

- Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on définit :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, on définit :

$$\exp(u) = e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} u^n$$

2.2 Exemples

Proposition. Si $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_p \end{pmatrix}$ est diagonale, alors $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{a_p} \end{pmatrix}$.

Proposition. Si $T = \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_p \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, alors $\exp(T)$ est de la forme :

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{a_1} & * & \cdots & * \\ 0 & e^{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & e^{a_p} \end{pmatrix}$$

Proposition. Si $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $\exp(N) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} N^k$.

2.3 Propriétés

Proposition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices semblables, et $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Alors :

$$\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$$

Corollaire. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Alors $\text{Sp}(\exp(A)) = \{e^\lambda, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

Proposition.

- L'application $\exp : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est continue.
- Pour E evn de dimension finie, $\exp : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ est continue.

Proposition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, telles que $AB = BA$.

- $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$
- $\exp(A)$ est inversible et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Proposition. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ où E est un evn de dimension finie, tels que $u \circ v = v \circ u$.

- $\exp(u + v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$
- $\exp(u)$ est inversible et $\exp(u)^{-1} = \exp(-u)$.

Remarque. En pratique, pour calculer $\exp(A)$ lorsque A est quelconque, on décompose A sous la forme $A = D + N$ où D est diagonalisable, N nilpotente et $ND = DN$. Ce résultat n'étant pas au programme, on se laisse guider par l'énoncé.

3 Annexe : pourquoi la convergence absolue implique la convergence

Théorème.

Dans E espace vectoriel normé de dimension finie, si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Les normes sur E étant équivalentes, on peut choisir comme norme :

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^p |x_i|$$

où $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ est l'écriture de x comme C.L. de \mathcal{B} .

On note $(u_n^{(i)})_n$ les suites coordonnées de $(u_n)_n$, et on remarque que, pour tout i :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n^{(i)}| \leq \|u_n\|_\infty$$

Par majoration, on a donc établi que, pour tout i , $\sum |u_n^{(i)}|$ converge, c'est-à-dire que la série numérique $\sum u_n^{(i)}$ converge absolument, donc converge. Ceci suffit à conclure. \square

Exercices et résultats classiques à connaître

Exponentielle d'une matrice antisymétrique

57.1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\exp \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

57.2

Soit M une matrice carrée d'ordre n , antisymétrique. Montrer que $\exp(M)$ est orthogonale.

Déterminant de l'exponentielle d'une matrice

57.3

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$$

L'exponentielle d'une matrice est un polynôme de cette matrice

57.4

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme de A .

Exercices du CCINP

57.5
 **40**

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\|\cdot\|$.
On suppose que : $\forall (u, v) \in A^2, \|u \cdot v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.
 - (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
 - (b) Démontrer que $(e - u)$ est inversible et que $(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.
2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

57.6
 **54.22**

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

2. On pose : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.
 - (b) Prouver que : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

57.7
 **61.23**

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}|$.

2. Démontrer que : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\| \leq n \|A\| \|B\|$.
Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geq 1, \|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p$.

3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
Est-elle convergente ?

Exercices

57.8

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que $\exp(A)^\top = \exp(A^\top)$.

57.9

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie p . Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que :

$$\exp(u) = P(u)$$

57.10

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

- (a) Étudier la diagonalisabilité de A , déterminer les polynômes minimal et caractéristique de A .
- (b) Calculer $\exp(A)$.

57.11

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$.

57.12

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$.

Petits problèmes d'entraînement

57.13

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ qui vérifie, pour tout $M, N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$:

$$\|MN\| \leq \|M\| \|N\|$$

On suppose que $\|A\| < 1$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\|A^n\| \leq \|A\|^n$

(b) Montrer que $\sum A^k$ converge absolument.

(c) Montrer que $I_p - A$ est inversible et que $(I_p - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

57.14

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer le polynôme minimal de A .

(b) Calculer $\exp(A)$.

57.15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) On suppose que $A^3 = A^2$. Calculer $\exp(A)$.

(b) On suppose que $A^4 + A^3 - 2A^2 = 0$. Calculer $\exp(A)$.