

## Séries à termes dans un evn de dimension finie

|  |          |
|--|----------|
| <b>Cours</b>   | <b>2</b> |
| 1 Séries à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie . . . . .                | 2        |
| 1.1 Somme partielle, convergence, divergence, somme, reste d'une série convergente . . . . . | 2        |
| 1.2 Divergence grossière . . . . .   | 2        |
| 1.3 Opérations . . . . .   | 2        |
| 1.4 Caractérisation par les coordonnées dans une base . . . . .                              | 3        |
| 1.5 Convergence absolue . . . . .  | 3        |
| 2 Application : séries de matrices, séries d'endomorphismes . . . . .                        | 3        |
| 2.1 Exponentielle de matrice, d'endomorphisme en dimension finie . . . . .                   | 3        |
| 2.2 Exemples . . . . .   | 4        |
| 2.3 Propriétés . . . . .   | 4        |
| 3 Annexe : pourquoi la convergence absolue implique la convergence . . . . .                 | 5        |
| <b>Exercices</b>   | <b>5</b> |
| Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .                                      | 5        |
| Exponentielle d'une matrice antisymétrique . . . . .   | 5        |
| Déterminant de l'exponentielle d'une matrice . . . . .                                       | 5        |
| L'exponentielle d'une matrice est un polynôme de cette matrice . . . . .                     | 5        |
| Exercices du CCINP . . . . .   | 6        |
| Exercices . . . . .  | 6        |
| Petits problèmes d'entraînement . . . . .  | 7        |

On reprend essentiellement dans ce chapitre la théorie des séries numériques, et on l'adapte aux evn. Dans tout le chapitre,  $E$  désigne un espace vectoriel muni d'une norme  $\|\cdot\|$ .

## 1 Séries à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie

### 1.1 Somme partielle, convergence, divergence, somme, reste d'une série convergente

**Définition.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . On s'intéresse à la série  $\sum u_n$ .

- $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  est la **somme partielle** d'ordre  $n$ .
- La série  $\sum u_n$  **converge** lorsque la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans l'espace vectoriel normé  $E$ , c'est-à-dire s'il existe  $S \in E$  tel que :

$$\left\| \sum_{k=0}^n u_k - S \right\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On dit qu'elle **diverge** sinon.

- En cas de convergence, on appelle **somme de la série**, et on note  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ , la limite de la suite des sommes partielles.

**Remarque.** Étudier une série, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

**Définition.** Lorsque la série  $\sum u_n$  converge, on peut définir son **reste** d'ordre  $n$ , avec les notations précédentes :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

**Proposition.** La suite des restes est bien définie lorsque  $\sum u_n$  converge, et  $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

### 1.2 Divergence grossière

**Proposition.** Si la série  $\sum u_n$  converge, alors la suite  $(u_n)_n$  converge vers 0

**Remarque.** Il s'agit d'une condition nécessaire.

**Définition.** Lorsque  $(u_n)_n$  ne converge pas vers 0, on dit que la série  $\sum u_n$  **diverge grossièrement**.

### 1.3 Opérations

**Proposition.** Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries convergentes,  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires. Alors la série  $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$  converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

**Corollaire.** L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, et l'application  $\sum u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  y est linéaire.

**Lien suite-série.** Soit  $(u_n)_n$  une suite à valeurs dans  $E$ . On a :

$$\text{la suite } (u_n)_n \text{ converge} \iff \text{la série } \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

**Proposition.** La convergence et la valeur de la somme d'une série convergente est indépendante du choix de la norme sur  $E$  qui est de dimension finie.

## 1.4 Caractérisation par les coordonnées dans une base

**Définition.** Soit  $\sum u_n$  une série à termes dans  $E$ , et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut écrire :

$$u_n = u_n^{(1)}e_1 + \dots + u_n^{(p)}e_p = \sum_{i=1}^p u_n^{(i)}e_i$$

l'unique écriture de  $u_n$  comme C.L. de  $\mathcal{B}$ .

La suite  $(u_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$  s'appelle la  $i$ -ème suite coordonnée de  $(u_n)_n$ .

**Proposition.** Avec les notations précédentes,

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \forall i \in \{1, \dots, p\}, \sum u_n^{(i)} \text{ converge}$$

et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(1)} \right) e_1 + \dots + \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)} \right) e_p = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(i)} \right) e_i$$

**Remarque.** La convergence de  $\sum u_n$  est caractérisée par la convergence de ses séries coordonnées dans une base  $\mathcal{B}$  fixée.

## 1.5 Convergence absolue

**Définition.** Soit  $\sum u_n$  une série à termes dans  $E$ . On dit que  $\sum u_n$  **converge absolument** si et seulement si la série numérique  $\sum \|u_n\|$  converge.

**Remarque.** Lorsque  $E = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , la norme la valeur absolue ou le module, et on retrouve bien la convergence absolue des séries numériques.

**Remarque.** On ne confondra pas la convergence absolue de  $\sum u_n$  dans  $(E, \|\cdot\|)$  evn de dimension finie, avec la convergence normale de  $\sum f_n$  dans l'espace  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$  des fonctions bornées, qui est la convergence de la série numérique  $\sum \|f_n\|_\infty$ .

**Théorème.**

Dans  $E$  espace vectoriel normé de dimension finie, si  $\sum u_n$  converge absolument, alors  $\sum u_n$  converge.

*Preuve.* Une justification est proposée en annexe. □

## 2 Application : séries de matrices, séries d'endomorphismes

### 2.1 Exponentielle de matrice, d'endomorphisme en dimension finie

**Définition.**

- Pour  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , on définit :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

- Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, on définit :

$$\exp(u) = e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} u^n$$

## 2.2 Exemples

**Proposition.** Si  $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_p \end{pmatrix}$  est diagonale, alors  $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{a_p} \end{pmatrix}$ .

**Proposition.** Si  $T = \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_p \end{pmatrix}$  est triangulaire supérieure, alors  $\exp(T)$  est de la forme :

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{a_1} & * & \cdots & * \\ 0 & e^{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & e^{a_p} \end{pmatrix}$$

**Proposition.** Si  $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est nilpotente, alors  $\exp(N) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} N^k$ .

## 2.3 Propriétés

**Proposition.** Soit  $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  deux matrices semblables, et  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  telle que  $A = PBP^{-1}$ . Alors :

$$\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$$

**Corollaire.** Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ . Alors  $\text{Sp}(\exp(A)) = \{e^\lambda, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ .

**Proposition.**

- L'application  $\exp : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est continue.
- Pour  $E$  evn de dimension finie,  $\exp : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  est continue.

**Proposition.** Soit  $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , telles que  $AB = BA$ .

- $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$
- $\exp(A)$  est inversible et  $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$ .

**Proposition.** Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un evn de dimension finie, tels que  $u \circ v = v \circ u$ .

- $\exp(u + v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$
- $\exp(u)$  est inversible et  $\exp(u)^{-1} = \exp(-u)$ .

**Remarque.** En pratique, pour calculer  $\exp(A)$  lorsque  $A$  est quelconque, on décompose  $A$  sous la forme  $A = D + N$  où  $D$  est diagonalisable,  $N$  nilpotente et  $ND = DN$ . Ce résultat n'étant pas au programme, on se laisse guider par l'énoncé.

### 3 Annexe : pourquoi la convergence absolue implique la convergence

#### Théorème.

Dans  $E$  espace vectoriel normé de dimension finie, si  $\sum u_n$  converge absolument, alors  $\sum u_n$  converge.

*Preuve.* Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Les normes sur  $E$  étant équivalentes, on peut choisir comme norme :

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^p |x_i|$$

où  $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$  est l'écriture de  $x$  comme C.L. de  $\mathcal{B}$ .

On note  $(u_n^{(i)})_n$  les suites coordonnées de  $(u_n)_n$ , et on remarque que, pour tout  $i$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n^{(i)}| \leq \|u_n\|_\infty$$

Par majoration, on a donc établi que, pour tout  $i$ ,  $\sum |u_n^{(i)}|$  converge, c'est-à-dire que la série numérique  $\sum u_n^{(i)}$  converge absolument, donc converge. Ceci suffit à conclure.  $\square$

### Exercices et résultats classiques à connaître

#### Exponentielle d'une matrice antisymétrique

57.1

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\exp \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ .

57.2

Soit  $M$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , antisymétrique. Montrer que  $\exp(M)$  est orthogonale.

#### Déterminant de l'exponentielle d'une matrice

57.3

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ . Montrer que :

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$$

#### L'exponentielle d'une matrice est un polynôme de cette matrice

57.4

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ . Montrer que  $\exp(A)$  est un polynôme de  $A$ .

## Exercices du CCINP

57.5

 40

Soit  $A$  une algèbre de dimension finie admettant  $e$  pour élément unité et munie d'une norme notée  $\|\cdot\|$ .  
On suppose que :  $\forall (u, v) \in A^2, \|u \cdot v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ .

1. Soit  $u$  un élément de  $A$  tel que  $\|u\| < 1$ .
  - (a) Démontrer que la série  $\sum u^n$  est convergente.
  - (b) Démontrer que  $(e - u)$  est inversible et que  $(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ .
2. Démontrer que, pour tout  $u \in A$ , la série  $\sum \frac{u^n}{n!}$  converge.

57.6

 54.22

Soit  $E$  l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

2. On pose :  $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ .
  - (b) Prouver que :  $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$  converge.

57.7

 61.23

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients complexes.

Pour  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose :  $\|A\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}|$ .

2. Démontrer que :  $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\| \leq n \|A\| \|B\|$ .  
Puis, démontrer que, pour tout entier  $p \geq 1, \|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p$ .

3. Démontrer que, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , la série  $\sum \frac{A^p}{p!}$  est absolument convergente.  
Est-elle convergente ?

## Exercices

57.8

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ . Montrer que  $\exp(A)^\top = \exp(A^\top)$ .

57.9

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$   $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie  $p$ . Montrer qu'il existe  $P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$  tel que :

$$\exp(u) = P(u)$$

57.10

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ .

- (a) Étudier la diagonalisabilité de  $A$ , déterminer les polynômes minimal et caractéristique de  $A$ .
- (b) Calculer  $\exp(A)$ .

57.11

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\exp(A)$ .

57.12

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\exp(A)$ .

## Petits problèmes d'entraînement

### 57.13

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , et  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  qui vérifie, pour tout  $M, N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  :

$$\|MN\| \leq \|M\| \|N\|$$

On suppose que  $\|A\| < 1$ .

(a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\|A^n\| \leq \|A\|^n$

(b) Montrer que  $\sum A^k$  converge absolument.

(c) Montrer que  $I_p - A$  est inversible et que  $(I_p - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ .

### 57.14

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$ .

(a) Calculer le polynôme minimal de  $A$ .

(b) Calculer  $\exp(A)$ .

### 57.15

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

(a) On suppose que  $A^3 = A^2$ . Calculer  $\exp(A)$ .

(b) On suppose que  $A^4 + A^3 - 2A^2 = 0$ . Calculer  $\exp(A)$ .

### 57.16

On propose dans cet exercice une autre démonstration du théorème affirmant que toute série absolument convergente d'un evn de dimension finie converge. On considère  $E$ , muni d'une norme  $\|\cdot\|$ , et  $\sum u_n$  une série que l'on suppose

absolument convergente. On note  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

(a) Montrer que  $(S_n)_n$  est bornée.

Comme  $E$  est de dimension finie, on peut donc extraire de  $(S_n)_n$  une suite  $(S_{\varphi(n)})_n$  qui converge vers une limite  $\ell$ .

(b) Montrer que la suite  $(S_n - S_{\varphi(n)})_n$  converge vers  $0_E$ .

(c) Montrer que  $\sum u_n$  converge.

### 57.17

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$   $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que :

$$\left( \text{Id}_E + \frac{1}{n} u \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(u)$$

*Indication* : Comparer  $\frac{1}{k!}$  et  $\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ .

### 57.18

Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice nilpotente. Comparer les espaces :

$$\text{Ker}(N) \text{ et } \text{Ker}(\exp(N) - I_n)$$

### 57.19

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ . Montrer que :

$$\left( \exp\left(\frac{A}{N}\right) \exp\left(\frac{B}{N}\right) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(A + B)$$

### 57.20

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , et  $\|\cdot\|$  une norme sous-multiplicative sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ . On suppose que  $\|A\| < 1$ .

(a) Calculer  $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ .

(b) Calculer  $\sum_{k=0}^{+\infty} k A^{k-1}$ .

**57.21**

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ . Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

(i) Toute valeur propre de  $M$  est en module  $< 1$  ;

(ii) La suite  $(A^n)_n$  tend vers 0 ;

(iii) La série  $\sum A^n$  converge.