# Fonctions usuelles

**Je me souviens** **2**
1.1 Puissances . . . 2
1.2 Exponentielles et logarithmes . . . 2
1.3 Trigonométrie hyperbolique . . . 2
1.4 Trigonométrie circulaire . . . 2
1.5 Trigonométrie circulaire réciproque . . . 2

**Exercices** **3**
Exercices et résultats classiques à connaître . . . 3
Une formule classique avec la fonction Arctan . . . 3
Une fonction hyperbolique réciproque . . . 3
Exercices . . . 4
Petits problèmes d'entrainement . . . 5

## Je me souviens

### 1.1 Puissances

1. Que sont les fonctions puissances ?
2. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
3. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?

### 1.2 Exponentielles et logarithmes

4. Que sont les fonctions exponentielles ? logarithmes ?
5. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
6. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
7. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?

### 1.3 Trigonométrie hyperbolique

8. Que sont les fonctions hyperboliques ?
9. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
10. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
11. Quel est le comportement au voisinage de l'infini ?
12. Il y a un formulaire de trigonométrie hyperbolique ?

### 1.4 Trigonométrie circulaire

13. Quelles sont les fonctions de trigonométrie circulaire ?
14. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Ont-elles des propriétés remarquables ?
15. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
16. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?
17. Il y a un formulaire de trigonométrie circulaire ?

### 1.5 Trigonométrie circulaire réciproque

18. Quelles sont les fonctions de trigonométrie circulaire réciproques ?
19. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
20. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
21. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?

# Exercices et résultats classiques à connaître

## Une formule classique avec la fonction Arctan

**610.1**

Montrer que, pour tout $x > 0$ :

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Et pour $x < 0$ ?

## Une fonction hyperbolique réciproque

**610.2**

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre l'équation :

$$\operatorname{sh} x = y$$

## Exercices

**610.3**

Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$ :

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$$

**610.4**

Résoudre l'équation :

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$$

**610.5**

On note :

$$f \ : \ x \mapsto (x+1)\operatorname{Arctan}(x)$$

Déterminer les asymptotes de $f$.

**610.6**

Simplifier les expressions suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| (a) $\cos(2\operatorname{Arccos} x)$ | (c) $\sin(2\operatorname{Arccos} x)$ | (e) $\sin(2\operatorname{Arctan} x)$ |
| (b) $\cos(2\operatorname{Arcsin} x)$ | (d) $\cos(2\operatorname{Arctan} x)$ | (f) $\tan(2\operatorname{Arcsin} x)$ |

**610.7**

Simplifier les expression $\sin(\operatorname{Arcsin} x)$ et $\operatorname{Arcsin}(\sin x)$.

**610.8**

Résoudre l'équation :

$$\operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{3}$$

**610.9**

Déterminer les réels $x$ tels que :

$$\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$$

**610.10**

Déterminer les réels $x > 0$ tels que :

$$x^{(x^x)} = (x^x)^x$$

**610.11**

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

$$\ln(x+1) + \ln(4x-1) = \ln(2x-1) + \ln(3x+1)$$

**610.12**

Résoudre l'inéquation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\log_4(x+2) > \log_2(x-1)$$

**610.13**

Résoudre le système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = \ln 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

**610.14**

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

$$2\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x = 2$$

**610.15**

Résoudre le système, d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \dfrac{27}{8} \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \dfrac{21}{8} \end{cases}$$

**610.16**

Justifier que l'application th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser, et exprimer sa réciproque à l'aide des fonctions usuelles.

**610.17**

(a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$

(b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$

**610.18**

Soit $x \neq 0\,(2\pi)$. Montrer que :

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

(a) en procédant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ ;

(b) en exploitant les nombres complexes.

**610.19**

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9}$.

## Petits problèmes d'entrainement

**610.20** ✍

Étudier et représenter la fonction définie par :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$$

**610.21** ✍

On s'intéresse à la série de terme général $u_p = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{p^2+p+1}$.

(a) Montrer la convergence de cette série.

(b) Calculer $\operatorname{Arctan}(p+1) - \operatorname{Arctan}(p)$.

(c) En déduire la somme de la série.

**610.22**

(a) Exprimer $\tan(a+b+c)$ en fonction de $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(c)$.

(b) En exploitant la formule précédente, calculer :

$$\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3 + \operatorname{Arctan}(2+\sqrt{3})$$

**610.23**

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

(a) Quel est le domaine de définition de $f$ ?

(b) Exprimer la dérivée de $f$.

(c) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ en fonction de $\operatorname{Arctan}(x)$.

**610.24**

Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de $x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

**610.25**

Étude de $f\ :\ x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}(1-2x^2)$.

**610.26**

Calculer, pour $n$ entier non nul et $x \in \mathbb{R}$ :

$$\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

**610.27**

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1+\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}$$

Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $I$ à préciser, et exprimer $f^{-1}$.

**610.28**

Montrer que $\log_3(2)$ est irrationnel.

**610.29**

Simplifier l'expression, pour $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\operatorname{Arccos} \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$$

**610.30**

Calculer :

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$$

**610.31**

Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ :

$$\sin x + \operatorname{Arcsin} x \geqslant 2x$$

**610.32**

On note $f$ la fonction Arctan. Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!\ \cos^n\big(f(x)\big)\ \sin\Big(n\big(\frac{\pi}{2} + f(x)\big)\Big)$$