

Fonctions usuelles

Je me souviens	2
1.1 Puissances	2
1.2 Exponentielles et logarithmes	2
1.3 Trigonométrie hyperbolique	2
1.4 Trigonométrie circulaire	2
1.5 Trigonométrie circulaire réciproque	2
Exercices	3
Exercices et résultats classiques à connaître	3
Une formule classique avec la fonction Arctan	3
Une fonction hyperbolique réciproque	3
Une fonction hyperbolique réciproque	3
Exercices	4
Petits problèmes d'entraînement	5

Je me souviens**1.1 Puissances**

1. Que sont les fonctions puissances ?
2. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
3. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?

1.2 Exponentielles et logarithmes

4. Que sont les fonctions exponentielles ? logarithmes ?
5. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
6. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?

1.3 Trigonométrie hyperbolique

7. Que sont les fonctions hyperboliques ?
8. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
9. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
10. Quel est le comportement au voisinage de l'infini ?
11. Il y a un formulaire de trigonométrie hyperbolique ?

1.4 Trigonométrie circulaire

12. Quelles sont les fonctions de trigonométrie circulaire ?
13. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Ont-elles des propriétés remarquables ?
14. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
15. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?
16. Il y a un formulaire de trigonométrie circulaire ?

1.5 Trigonométrie circulaire réciproque

17. Quelles sont les fonctions de trigonométrie circulaire réciproques ?
18. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
19. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
20. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?

Exercices et résultats classiques à connaître**Une formule classique avec la fonction Arctan****610.1**

Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Et pour $x < 0$?

Une fonction hyperbolique réciproque**610.2**

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\operatorname{ch} x = y$$

Un calcul de somme**610.3**

(a) Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$

(b) Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$

Exercices

610.4

Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$$

610.5

Résoudre l'équation :

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$$

610.6

On note :

$$f : x \mapsto (x + 1) \operatorname{Arctan}(x)$$

Déterminer les asymptotes de f .

610.7

Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\cos(2 \operatorname{Arccos} x)$	(c) $\sin(2 \operatorname{Arccos} x)$	(e) $\sin(2 \operatorname{Arctan} x)$
(b) $\cos(2 \operatorname{Arcsin} x)$	(d) $\cos(2 \operatorname{Arctan} x)$	(f) $\tan(2 \operatorname{Arcsin} x)$

610.8

Simplifier les expression $\sin(\operatorname{Arcsin} x)$ et $\operatorname{Arcsin}(\sin x)$.

610.9

Résoudre l'équation :

$$\operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{3}$$

610.10

Déterminer les réels x tels que :

$$\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$$

610.11

Déterminer les réels $x > 0$ tels que :

$$x^{(x^x)} = (x^x)^x$$

610.12

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(x+1) + \ln(4x-1) = \ln(2x-1) + \ln(3x+1)$$

610.13

Résoudre l'inéquation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\log_4(x+2) > \log_2(x-1)$$

610.14

Résoudre le système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2 \ln x - 3 \ln y = \ln 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

610.15

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x = 2$$

610.16

Résoudre le système, d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \frac{27}{8} \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \frac{21}{8} \end{cases}$$

610.17

Justifier que l'application th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser, et exprimer sa réciproque à l'aide des fonctions usuelles.

610.18

Soit $x \neq 0 (2\pi)$. Montrer que :

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

- (a) en procédant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$;
- (b) en exploitant les nombres complexes.

610.19

Calculer $\sum_{k=1}^4 \cos^2 \frac{k\pi}{9}$.

Petits problèmes d'entraînement

610.20

Étudier et représenter la fonction définie par :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$$

610.21

On s'intéresse à la série de terme général $u_p = \operatorname{Arctan} \frac{1}{p^2 + p + 1}$.

- (a) Montrer la convergence de cette série.
- (b) Calculer $\operatorname{Arctan}(p+1) - \operatorname{Arctan}(p)$.
- (c) En déduire la somme de la série.

610.22

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

- (a) Quel est le domaine de définition de f ?
- (b) Exprimer la dérivée de f .
- (c) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ en fonction de $\operatorname{Arctan}(x)$.

610.23

- (a) Exprimer $\tan(a+b+c)$ en fonction de $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(c)$.
- (b) En exploitant la formule précédente, calculer :

$$\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3 + \operatorname{Arctan}(2 + \sqrt{3})$$

610.24

Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de $x \mapsto \operatorname{Arcsin} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

610.25

Étude de $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}(1 - 2x^2)$.

610.26

Calculer, pour n entier non nul et $x \in \mathbb{R}$:

$$\prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

610.27

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1 + \operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch} x}$$

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser, et exprimer f^{-1} .

610.28

Montrer que $\log_3(2)$ est irrationnel.

610.29

Simplifier l'expression, pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Arccos} \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + y^2}}$$

610.30

Calculer :

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}$$

610.31

Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\sin x + \operatorname{Arcsin} x \geq 2x$$

610.32

On note f la fonction Arctan . Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(n\left(\frac{\pi}{2} + f(x)\right)\right)$$