

Analyse asymptotique

Je me souviens	2
Exercices	3
Exercices et résultats classiques à connaître	3
Un équivalent par encadrement	3
Le DL de $\tan(x)$	3
Exercices du CCINP	4
Exercices	4
Petits problèmes d'entraînement	5

Je me souviens

1. C'est quoi, l'analyse asymptotique ?
2. Ça veut dire quoi, négligeable ?
3. C'est quoi, un $o(1)$?
4. Ça veut dire quoi, dominé ?
5. C'est quoi, un $O(1)$?
6. On peut faire des opérations sur les petit o ? sur les grand O ?
7. Ça veut dire quoi, équivalent ?
8. Est-ce que c'est une relation d'équivalence ?
9. On peut faire des opérations sur les équivalents ?
10. Y a-t-il des équivalents usuels ?
11. À quoi servent les équivalents ?
12. Qu'est ce qui se cache derrière l'argument souvent avancé de « croissances comparées » ?
13. C'est quoi, un développement limité en 0 ?
14. Est-ce qu'un DL donne un équivalent ? un équivalent donne un DL ?
15. Quels sont les DL que l'on doit connaître ?
16. Opérations sur les DL ?
17. C'est quoi, un développement limité en a ?
18. C'est quoi, un développement asymptotique ?
19. Au voisinage de $n \rightarrow +\infty$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim ?$
20. Donner un exemple de suites telles que $u_n \sim v_n$ mais $e^{u_n} \not\sim e^{v_n}$.
21. Est-ce qu'on a toujours $u_{n+1} \sim u_n$?

Exercices et résultats classiques à connaître**Un équivalent par encadrement****620.1**

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle décroissante telle que :

$$u_{n+1} + u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Déterminer un équivalent simple de u_n .

Le DL de $\tan(x)$ **620.2**

(a) Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

(b) Prolonger ce développement limité à l'ordre 5 en exploitant :

$$\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$$

(c) Prolonger ce développement limité à l'ordre 7 en exploitant :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

Exercices du CCINP

620.3
 **7.1**

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

1. Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

620.4
 **46.1**

On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$:

$$\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où α est un réel que l'on déterminera.

Exercices

620.5

Déterminer un équivalent simple de :

- | | |
|---|---|
| (a) $\ln(2n)$ | (f) $n^2 + n - \ln(n^3 + n)$ |
| (b) $\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)$ où $a \in \mathbb{R}^*$ | (g) $\sin(n^2 + 1) - \sqrt{n}$ |
| (c) $\sqrt{1 + \sqrt{n^2 + 1}}$ | (h) $e^{\sqrt{n}} + n^6$ |
| (d) $e^{n^2 + n + 1}$ | (i) $\frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{2}{n}}}{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n}}$ |
| (e) $\ln(n^2 + n + 1)$ | (j) $\sin\left(\cos\left(\frac{1}{\ln n}\right) - e^{\frac{1}{n}}\right)$ |

620.6

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $x \rightarrow 0$ de :

- | | |
|-------------------------------------|--|
| (a) $\frac{1 - \cos x}{\ln(1 + x)}$ | (d) $(8 + x)^{\frac{1}{3}} - 2$ |
| (b) $\ln(\cos x)$ | (e) $\ln(1 + x + \sqrt{4 + x}) - \ln(3)$ |
| (c) $x^x - 1$ | (f) $\ln(3e^x + e^{-x}) - 2 \ln 2$. |

620.7

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $x \rightarrow +\infty$ de :

- | | |
|---|--|
| (a) $(x + 1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}}$ | (e) $\ln(1 + x + \sqrt{4 + x})$ |
| (b) $x^{x^{\frac{1}{x}}}$ | (f) $\ln(3e^x + e^{-x})$ |
| (c) $\ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)$ | (g) $\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$ |
| (d) $\ln\left(\frac{\operatorname{th} x}{x}\right)$ | (h) $\sqrt{x} + \sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 2}$ |

620.8

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $x \rightarrow \pi$ de :

- | | |
|---------------|------------------------|
| (a) $\sin(x)$ | (b) $\cos \frac{x}{2}$ |
|---------------|------------------------|

620.9

Étudier la convergence de la suite de terme général :

- | | |
|---------------------------------|---|
| (a) $\frac{\sin n}{n}$ | (e) $(n^2 + 1)e^{-\sqrt{n}}$ |
| (b) $\frac{n}{n^2 + 1}$ | (f) $\ln(n^3 + n + 1) \sqrt{\sin \frac{1}{n}}$ |
| (c) $\frac{n + (-1)^n}{3n + 1}$ | (g) $\frac{1}{n} \ln \left(\frac{n^2 + 2n}{n^3 + 2} \right)$ |
| (d) $\frac{\ln(n) \sin(n)}{n}$ | (h) $\ln \left(\sin \left(\pi \cos(e^{-n}) \right) \right)$ |

620.10

- (a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\text{Arctan}(e^x)$.
- (b) Quelle est l'allure de la courbe correspondante au voisinage du point d'abscisse 0 ?

Petits problèmes d'entraînement**620.11**

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 1 + x^2 \sin \frac{1}{x}$$

- (a) Montrer que f se prolonge en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
- (b) Est-ce que la dérivée de f admet un développement limité en 0 ?

620.12

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, avec $f(1) \neq 0$. On pose :

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$$

Déterminer un équivalent simple de I_n en supposant :

- (a) f de classe $\mathcal{C}^1$;
- (b) f continue.

620.13

- (a) Déterminer le développement asymptotique à trois termes en $+\infty$ de $x \text{Arctan}(x)$.
- (b) Quelle est l'allure de la courbe correspondante, au voisinage de $x \rightarrow +\infty$?

620.14

Déterminer l'asymptote en $+\infty$ et préciser la position de la courbe pour :

$$\frac{1}{\ln \left(1 + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)}$$

620.15

Soit P et Q deux polynômes de degré au plus n , et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$P(x) - Q(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^n) \implies P = Q$$

620.16

Montrer que $\sum_{k=0}^n k! \sim n!$.

620.17

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives. On suppose que $\sum v_n$ diverge et que $u_n = o(v_n)$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$$

620.18

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme :

$$P_n = X(X-1)\dots(X-n)$$

- (a) Montrer que le polynôme P'_n possède une unique racine dans l'intervalle $]0, 1[$. On la note x_n .
- (b) Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.
- (c) Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$F_n = \frac{P'_n}{P_n}$$

- (d) Déterminer un équivalent de x_n .

620.19

Déterminer le développement asymptotique :

- (a) à 2 termes de $u_n = \frac{1}{n + \sin n}$
- (b) à 3 termes de $v_n = (n+1)\ln(n) - n\ln(n+1)$

620.20

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x + \sqrt[3]{x} = n$$

- (a) Montrer que cette équation possède une unique solution x_n .
- (b) Déterminer la limite, puis un équivalent simple de $(x_n)_n$.
- (c) Donner un développement asymptotique à trois termes de $(x_n)_n$.

620.21

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x^n \ln x = 1$$

- (a) Montrer que cette équation possède une unique solution x_n , et que $x_n > 1$.
- (b) Montrer que $(x_n)_n$ est décroissante, et déterminer sa limite.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = x_n - 1$.

- (c) Justifier que $ny_n \sim -\ln y_n$ et en déduire un équivalent de y_n .