Analyse asymptotique

Je me souviens

1. C'est quoi, l'analyse asymptotique ?
2. Ça veut dire quoi, négligeable ?
3. C'est quoi, un $o(1)$?
4. Ça veut dire quoi, dominé ?
5. C'est quoi, un $O(1)$?
6. On peut faire des opérations sur les petit o ? sur les grand O ?
7. Ça veut dire quoi, équivalent ?
8. Est-ce que c'est une relation d'équivalence ?
9. On peut faire des opérations sur les équivalents ?
10. Y a-t-il des équivalents usuels ?
11. À quoi servent les équivalents ?
12. Qu'est ce qui se cache derrière l'argument souvent avancé de « croissances comparées » ?
13. C'est quoi, un développement limité en 0 ?
14. Est-ce qu'un DL donne un équivalent ? un équivalent donne un DL ?
15. Quels sont les DL que l'on doit connaître ?
16. Opérations sur les DL ?
17. C'est quoi, un développement limité en a ?
18. C'est quoi, un développement asymptotique ?
19. Au voisinage de $n \to +\infty$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \sim$?
20. Donner un exemple de suites telles que $u_n \sim v_n$ mais $\mathrm{e}^{u_n} \not\sim \mathrm{e}^{v_n}$.
21. Est-ce qu'on a toujours $u_{n+1} \sim u_n$?

Exercices et résultats classiques à connaître

Un équivalent par encadrement

620.1

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle décroissante telle que :

$$u_{n+1} + u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Déterminer un équivalent simple de u_n.

Le DL de $\tan(x)$

620.2

(a) Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

(b) Prolonger ce développement limité à l'ordre 5 en exploitant :

$$\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$$

(c) Prolonger ce développement limité à l'ordre 7 en exploitant :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

Exercices du CCINP

620.3 7.1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

1. Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

620.4 46.1

On considère la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$:
$$\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
où α est un réel que l'on déterminera.

Exercices

620.5

Déterminer un équivalent simple de :

(a) $\ln(2n)$

(b) $\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right)$ où $a \in \mathbb{R}^*$

(c) $\sqrt{1+\sqrt{n^2+1}}$

(d) e^{n^2+n+1}

(e) $\ln(n^2+n+1)$

(f) $n^2+n-\ln(n^3+n)$

(g) $\sin(n^2+1)-\sqrt{n}$

(h) $\mathrm{e}^{\sqrt{n}}+n^6$

(i) $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}}{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}}$

(j) $\sin\left(\cos\left(\frac{1}{\ln n}\right)-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)$

620.6

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $x \to 0$ de :

(a) $\dfrac{1-\cos x}{\ln(1+x)}$

(b) $\ln(\cos x)$

(c) $x^x - 1$

(d) $(8+x)^{\frac{1}{3}}-2$

(e) $\ln(1+x+\sqrt{4+x})-\ln(3)$

(f) $\ln(3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})-2\ln 2$.

620.7

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $x \to +\infty$ de :

(a) $(x+1)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x}}$

(b) $x^{x^{\frac{1}{x}}}$

(c) $\ln\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}\right)$

(d) $\ln\left(\dfrac{\operatorname{th} x}{x}\right)$

(e) $\ln(1+x+\sqrt{4+x})$

(f) $\ln(3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$

(g) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

(h) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}$

620.8

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $x \to \pi$ de :

(a) $\sin(x)$

(b) $\cos\dfrac{x}{2}$

620.9

Étudier la convergence de la suite de terme général :

(a) $\dfrac{\sin n}{n}$

(b) $\dfrac{n}{n^2+1}$

(c) $\dfrac{n+(-1)^n}{3n+1}$

(d) $\dfrac{\ln(n)\,\sin(n)}{n}$

(e) $(n^2+1)\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

(f) $\ln(n^3+n+1)\sqrt{\sin\dfrac{1}{n}}$

(g) $\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n^2+2n}{n^3+2}\right)$

(h) $\ln\Big(\sin\big(\pi\cos(\mathrm{e}^{-n})\big)\Big)$

620.10

(a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x)$.

(b) Quelle est l'allure de la courbe correspondante au voisinage du point d'abscisse 0 ?

Petits problèmes d'entrainement

620.11 ✍

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 1 + x^2 \sin\frac{1}{x}$$

(a) Montrer que f se prolonge en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Est-ce que la dérivée de f admet un développement limité en 0 ?

620.12 ✍

Soit $f\ :\ [0,1]\to\mathbb{R}$, avec $f(1)\neq 0$. On pose :

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminer un équivalent simple de I_n en supposant :

(a) f de classe $\mathcal{C}^1$;

(b) f continue.

620.13

(a) Déterminer le développement asymptotique à trois termes en $+\infty$ de $x\,\mathrm{Arctan}(x)$.

(b) Quelle est l'allure de la courbe correspondante, au voisinage de $x\to+\infty$?

620.14

Déterminer l'asymptote en $+\infty$ et préciser la position de la courbe pour :

$$\frac{1}{\ln\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}$$

620.15

Soit P et Q deux polynômes de degré au plus n, et $x_0\in\mathbb{R}$. Montrer que :

$$P(x)-Q(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^n) \implies P = Q$$

620.16

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$.

620.17

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives. On suppose que $\sum v_n$ diverge et que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

620.18

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme :

$$P_n = X(X-1)\dots(X-n)$$

(a) Montrer que le polynôme P_n' possède une unique racine dans l'intervalle $]0,1[$. On la note x_n.

(b) Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

(c) Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$F_n = \frac{P_n'}{P_n}$$

(d) Déterminer un équivalent de x_n.

620.19

Déterminer le développement asymptotique :

(a) à 2 termes de $u_n = \dfrac{1}{n+\sin n}$

(b) à 3 termes de $v_n = (n+1)\ln(n) - n\ln(n+1)$

620.20

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x + \sqrt[3]{x} = n$$

(a) Montrer que cette équation possède une unique solution x_n.

(b) Déterminer la limite, puis un équivalent simple de $(x_n)_n$.

(c) Donner un développement asymptotique à trois termes de $(x_n)_n$.

620.21

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x^n \ln x = 1$$

(a) Montrer que cette équation possède une unique solution x_n, et que $x_n > 1$.

(b) Montrer que $(x_n)_n$ est décroissante, et déterminer sa limite.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = x_n - 1$.

(c) Justifier que $ny_n \sim -\ln y_n$ et en déduire un équivalent de y_n.