Dérivation des fonctions numériques

Je me souviens

0.1 Dérivée

1. Comment définir la dérivée en a de $f : I \to \mathbb{K}$.
2. Équation de la tangente ?
3. Une ~~autre définition~~ caractérisation de la dérivée ?
4. Dérivée à droite ? à gauche ?
5. Lien entre dérivabilité et continuité ?
6. Dérivée des fonctions $I \to \mathbb{C}$?
7. Quelle est la dérivée de $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$?

0.2 Théorème de Rolle

On ne parle ici que de fonctions réelles.

8. Pour $f : I \to \mathbb{R}$, définir « f admet un maximum global en a ».
9. Pour $f : I \to \mathbb{R}$, définir « f admet un maximum local en a ».
10. Énoncer le théorème faisant le lien entre extremum local et annulation de la dérivée.
11. Énoncer le théorème de Rolle.

0.3 Accroissements finis

12. Quelle est l'égalité des accroissements finis ?
13. Quelle est l'inégalité des accroissements finis ?
14. Il y a un lien avec le théorème fondamental de l'analyse ?
15. À quelle condition f dérivable est-elle consante ?
16. À quelle condition f dérivable à valeurs réelles est-elle croissante ?
17. À quelle condition f dérivable à valeurs réelles est-elle strictement croissante ?

0.4 Opérations sur les fonctions dérivables

18. $(\lambda f + \mu g)'(x) =$
19. $(f \times g)'(x) =$
20. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) =$
21. $(g \circ f)'(x) =$
22. $(f^{-1})'(x) =$

0.5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

23. Définir « f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I »
24. Définir « f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I », où $k \in \mathbb{K}$.
25. Définir « f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I »
26. $(\lambda f + \mu g)^{(k)}(x) =$
27. Énoncer la formule de Leibniz.
28. Comment démontrer la formule de Leibniz ?
29. Pour $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $\phi : J \to I$ de classe $\mathcal{C}^k$, que dire de $f \circ \phi$?

0.6 Limite de la dérivée

30. Énoncer le théorème limite de la dérivée.
31. Comment utiliser le résultat précédent pour prolonger à I de façon $\mathcal{C}^1$ une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$?

1 Annexes

1.1 Complément : le théorème de Darboux

Théorème de Darboux.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable. Alors f' satisfait la propriété des valeurs intermédiaires.

Remarque. *Ce théorème est complètement hors programme. Il est intéressant lorsque f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire lorsque l'on ne peut pas appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f'.*

Preuve.

- On suppose f dérivable sur $[a, b]$, et on considère γ entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On cherche $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = \gamma$. L'idée est celle du théorème de Rolle, pour lequel la conclusion est analogue, mais avec $\gamma = 0$. On considère donc :

$$g : x \mapsto f(x) - \gamma t$$

g est continue sur le segment $[a, b]$, donc admet un minimum et un maximum, par le théorème des bornes atteintes.

- Si le minimum ou le maximum est atteint en $c \in]a, b[$, on a trouvé c tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) = \gamma$.
- Sinon, le minimum et le maximum sont par exemple atteints en a et b respectivement, et donc $g'(a) \geqslant 0$ et $g'(b) \geqslant 0$. Par hypothèse, $g'(a) = f'(a) - \gamma$ et $g'(b) = f'(b) - \gamma$ sont de signes opposés, donc les deux inégalités ne peuvent être strictes. On a trouvé c (égal à a ou b) tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) = \gamma$.

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Si P est scindé simple sur $\mathbb{R}$, P' aussi

63.1

(a) Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré $\geqslant 2$, scindé à racines simples, alors P' est aussi scindé à racines simples.

(b) Le résultat est-il vrai si on suppose $P \in \mathbb{C}[X]$?

(c) Montrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme scindé, alors P' est aussi scindé.

Un prolongement $\mathcal{C}^1$

63.2

Montrer que la fonction, définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercices du CCINP

63.3 CCINP 3

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

63.4 CCINP 4

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \left]a,b\right[$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $\left]a,x_0\right[$ et sur $\left]x_0,b\right[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Exercices

63.5

Montrer que le polynôme :

$$\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

63.6

Utiliser les accroissements finis pour démontrer les inégalités :

(a) $|\sin x| \leqslant |x|$ pour $x \in \mathbb{R}$

(b) $\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

63.7

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

63.8

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de :

(a) x^k

(b) $\dfrac{1}{x}$

(c) $(x^2 - x + 1)\mathrm{e}^{-x}$

(d) $\cos^3 x$

(e) $\cos(x)\mathrm{e}^x$

(f) $\dfrac{1}{x^2-1}$

Petits problèmes d'entrainement

63.9 ✍

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que f admet des limites finies et égales en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

63.10 ✍

(a) On définit sur $\mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que la fonction définie par :

$$\psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{2}{x^2-1}} & \text{si } x \in \left]-1,1\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

63.11

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

où P_n est un polynôme, scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

63.12

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction bornée et dérivable. On suppose que la dérivée f' admet une limite ℓ en $+\infty$. Déterminer ℓ.

63.13

On considère :

$$f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \sin(x)$$

(a) Montrer que f n'a pas de limite en $+\infty$.

(b) Montrer que f est majorée, et déterminer sa borne supérieure.

(c) Montrer que la dérivée de f s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que f n'admet pas de maximum global sur $\mathbb{R}$.

63.14

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ admettant une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f'' s'annule.

63.15

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que :

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ et } f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$$

Montrer qu'il existe $a \in]0,+\infty[$ abscisse d'un point où la tangente à la courbe représentative de f passe par l'origine.

63.16

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$$

Montrer que P_n admet exactement n racines réelles.

63.17

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $|f'(x)| < 1$ pour tout $x \in [a,b]$.

(a) Montrer que f admet un unique point fixe α.

(b) Montrer que tout suite définie par :

$$u_0 \in [a,b] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers α.

63.18

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **hölderienne d'exposant** $\alpha > 0$ lorsqu'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x,y \in I,\ |f(y) - f(x)| \leqslant M|y-x|^\alpha$$

(a) Montrer qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ est hölderienne d'exposant 1.

(b) Démontrer que les fonctions hölderiennes d'exposant > 1 sont constantes.

On considère la fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$ définie sur $]0,1]$.

(c) Montrer que f n'est pas hölderienne d'exposant 1.

(d) Montrer que f est hölderienne d'exposant α pour tout $\alpha \in]0,1[$.

63.19

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$f \circ f = f$$

63.20

Soit f une fonction numérique deux fois dérivable sur I intervalle. On considère $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$. Montrer qu'il existe $d \in I$ tel que :

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-b)(c-a)} = \frac{1}{2} f''(d)$$

On pourra introduire :

$$\varphi : x \mapsto (x-b)f(a) + (a-x)f(b) + (b-a)f(x) - K(b-a)(b-x)(x-a)$$

où K est une constante bien choisie.