Intégration sur un segment des fonctions numériques

Je me souviens — l'intégrale comme un nombre

1.1 Fonctions continues par morceaux

1. Qu'est-ce qu'une **subdivision** du segment $[a, b]$?
2. Qu'est-ce qu'une fonction **continue par morceaux** sur $[a, b]$?
3. Que dire d'une combinaison linéaire de deux fonctions continues par morceaux ? d'un produit de deux fonctions continues par morceaux ?
4. Prêt à le démontrer ?
5. Est-ce que l'ensemble $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ possède une structure particulière ?

1.2 Intégrale d'une fonctions cpm sur un segment

6. Quel est le lien entre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$?
7. Énoncer la relation de Chasles.
8. Qu'est-ce que la linéarité de l'intégrale ?
9. Qu'est-ce que la positivité de l'intégrale ? la croissance de l'intégrale ?
10. Qu'est-ce que l'inégalité triangulaire pour les intégrales ?
11. Que dire face à une intégrale nulle d'une fonction positive ?

1.3 Sommes de Riemann

12. Que dit le théorème sur les sommes de Riemann ?

Je me souviens — l'intégrale comme une fonction de la borne d'en haut

2.4 Intégrale et primitive

13. Qu'appelle-t-on **primitive** d'une fonction f ?
14. Quelle est la classe des primitives de fonctions continues ?
15. Que dire de deux primitives d'une même fonction sur un intervalle ?
16. Énoncer le théorème fondamental, qui fait le lien entre intégrale et primitive.
17. Si f est continue, comment dériver $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$?

2.5 Intégration par parties, changement de variable

18. Qu'appelle-t-on « intégration par parties » ?
19. Comment faire un changement de variable pour le calcul d'une intégrale ?

2.6 Primitives usuelles

20. Donner une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
21. Donner une primitive de $\ln x$.
22. Donner une primitive de $\dfrac{1}{1+x^2}$.
23. Donner une primitive de $\dfrac{1}{1-x^2}$.
24. Donner une primitive de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

2.7 Formules de Taylor

25. Qu'est-ce que le polynôme de Taylor d'une fonction ?
26. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
27. Comment démontrer la formule précédente ?
28. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

3 Annexes

3.1 Annexe : intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

Définition. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est **en escalier** lorsqu'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ du segment $[a,b]$ telle que, pour tout i, la restriction $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ soit une fonction constante. On note k_i sa valeur. On dit que la subdivision est **adaptée** à f.

On appelle **intégrale de f sur $[a,b]$** le nombre :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} k_i(x_{i+1} - x_i)$$

que l'on interprète géométriquement comme on le pense.

Remarque. *Cette définition est indépendante du choix de la subdivision adpatée à f.*

Notation. On note indifféremment $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f$. Il n'est pas toujours judicieux de vouloir faire l'économie de l'écriture de la variable d'intégration.

Proposition. Pour f, g en escalier sur $[a,b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$
- Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$
- Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

3.2 Complément : approximation uniforme des fonctions cpm par des fonctions en escalier

Proposition. L'ensemble $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ est dense dans $(\mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, ce qui signifie que toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Preuve. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On veut construire une suite de fonctions en escalier qui tend, au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$, vers f.

- 1$^{\text{er}}$ cas : si f est continue.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[a,b]$. Ainsi, par définition appliquée à $\varepsilon = \dfrac{1}{n} > 0$, il existe $\eta_n > 0$ tel que :
  $$\forall x, y \in [a,b],\ |x-y| \leqslant \eta_n \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$
  Considérons alors p entier tel que $\dfrac{b-a}{p} < \eta_n$, la subdivision régulière de $[a,b]$ $\left(x_k = a + k\dfrac{b-a}{p}\right)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ et la fonction en escalier :
  $$\forall k \in \{0, \dots, p-1\},\ \forall x \in [x_k, x_{k+1}[,\ g_n(x) = f(x_k)$$
  complétée par $g_n(b) = f(b)$.
  La fonction g_n ainsi définie est constante sur chaque $[x_k, x_{k+1}[$, donc en escalier.
  De plus, pour tout $x \in [a,b[$, il existe $k \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $x \in [x_k, x_{k+1}[$, donc $|x - x_k| \leqslant \dfrac{b-a}{p} < \eta_n$ et par suite :
  $$|f(x) - g_n(x)| = |f(x) - f(x_k)| \leqslant \frac{1}{n}$$
  La majoration, aussi valable pour $x = b$, est indépendante de x donc :
  $$\|f - g_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
  On a donc montré que $(g_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
- 2$^{\text{e}}$ cas : si f est continue par morceaux.
  On considère $(y_j)_{0 \leqslant j \leqslant q}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, c'est-à-dire que chaque $f_{|]y_j, y_{j+1}[}$ est continue et admet une limite finie à droite en y_j et à gauche en y_{j+1}. Elle se prolonge donc à $[y_j, y_{j+1}]$ en une fonction continue notée f_j.
  On applique à f_j le point précédent, ce qui fournit une suite $(g_n^j)_n$ qui converge uniformément vers f_j sur $[y_j, y_{j+1}]$.
  On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a,b]$:
  $$h_n(x) = \begin{cases} g_n^j(x) & \text{si } x \in]y_j, y_{j+1}[\\ f(y_j) & \text{si } x = y_j \end{cases}$$
  La fonction h_n est en escalier sur $[a,b]$, et, pour tout x,
  $$|f(x) - h_n(x)| = \begin{cases} |f_j(x) - g_n^j(x)| \leqslant \dfrac{1}{n} & \text{si } x \in]y_j, y_{j+1}[\\ 0 \leqslant \dfrac{1}{n} & \text{si } x = y_j \end{cases}$$
  donc
  $$\|f - h_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
  On a donc montré que $(h_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

□

Corollaire. Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, à valeurs réelles, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ, ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que :
$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et } \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$$

Preuve. Par la propositin précédente, on sait qu'il existe ψ en escalier telle que $\left\|(f + \frac{\varepsilon}{4}) - \psi\right\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, c'est-à-dire :
$$f \leqslant \psi \leqslant f + \frac{\varepsilon}{2}$$
On pose $\varphi = \psi - \dfrac{\varepsilon}{2}$. □

3.3 Annexe : une construction de l'intégrale des fonctions cpm sur un segment

Construction. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. On considère :

$$\mathcal{I}^-(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi,\ \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}),\ \varphi \leqslant f \right\}$$
$$\mathcal{I}^+(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \psi,\ \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}),\ f \leqslant \psi \right\}$$

$\mathcal{I}^-(f)$ admet une borne supérieure, $\mathcal{I}^+(f)$ admet une borne inférieure, et :

$$\operatorname{Sup}\mathcal{I}^-(f) = \operatorname{Inf}\mathcal{I}^+(f)$$

Cette valeur commune s'appelle **l'intégrale de f sur $[a,b]$**.

Preuve.

- f est continue par morceaux sur $[a,b]$, donc il existe une subdivision $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ adaptée à f, c'est-à-dire telle que, pour tout i, la restriction $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ se prolonge à $[x_i,x_{i+1}]$ en une fonction continue, donc bornée. On note M_i un majorant. Alors $M = \operatorname{Max}\{f(x_0),\dots,f(x_n),M_0,\dots,M_{n-1}\}$ est un majorant de f sur $[a,b]$. C'est aussi une fonction en escalier (constante) majorant f, donc $M(b-a)$ majore $\mathcal{I}^-(f)$. Ainsi, $\mathcal{I}^-(f)$ est une partie non vide, majorée, de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure. On la note S.
- $\mathcal{I}^+(f)$ admet une borne inférieure pour des raisons analogues. On la note I.
- $\forall\varphi,\psi$ en escalier telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, on a $\int_a^b \varphi \leqslant \int_a^b \psi$. Comme ceci est vrai pour tout φ, c'est que $\int_a^b \psi$ est un majorant, donc par définition de la borne sup, $S \leqslant \int_a^b \psi$. Mais ceci est vrai pour tout ψ, donc S est un minorant et par définition de la borne inf, $S \leqslant I$.
- Fixons $\varepsilon > 0$. En appliquant le corollaire de la section précédente avec $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que :

  $$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et } \psi - \varphi \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$$

  On a $\int_a^b \varphi \leqslant S \leqslant I \leqslant \int_a^b \psi$, donc :

  $$I - S \leqslant \int_a^b \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$

  Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, c'est que $I - S \leqslant 0$.

On a montré que $I = S$. □

3.4 Complément : démonstration du théorème fondamental

Théorème.

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$. Il existe une unique primitive de f sur I qui s'annule en a, et cette primitive est :

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve.

- *Existence*
  Définissons, pour $x \in I$: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
  On veut montrer que F est une primitive de f sur I, c'est-à-dire que, pour tout $x \in I$:

  $$F(x+h) = F(x) + hf(x) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

  Soit $x \in I$ fixé. Si x est une extrémité de I, un seul des points suivants s'applique.

  - Au voisinage de $h \overset{>}{\to} 0$, $x + h \in I$ et :

    $$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) - hf(x) &= \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\ - hf(x) \\ &= \int_x^{x+h} f(t) - f(x)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

    donc

    $$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x) - hf(x)| &\leqslant \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

    On revient à la définition de limite avec des ε. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par définition de la continuité de f en x, il existe $\eta > 0$ tel que :

    $$\forall y \in I,\ |y - x| \leqslant \eta \implies |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

    Lorsque $h \leqslant \eta$, tout $t \in [x, x+h]$ satisfait $|t - x| \leqslant \eta$, donc $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. On a donc, pour $h \leqslant \eta$:

    $$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x) - hf(x)| &\leqslant \int_x^{x+h} \varepsilon\,\mathrm{d}t \\ &= \varepsilon h \end{aligned}$$

  - Au voisinage de $h \overset{<}{\to} 0$, on travaille de façon symétrique en faisant attention à l'ordre des bornes d'intégration.

  On a donc montré :

  $$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0,\quad |h| \leqslant \eta \implies |F(x+h) - F(x) - hf(x)| \leqslant \varepsilon h$$

  c'est-à-dire :

  $$F(x+h) - F(x) - hf(x) = \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

  Ce qui prouve que F est dérivable en x, et que $F'(x) = f(x)$.
- *Unicité*
  Si F et G conviennent, pour tout $x \in I$:

  $$(F - G)'(x) = 0$$

  Il s'agit d'une fonction dérivable à dérivée nulle sur un intervalle, donc $F - G$ est constante, c'est donc que $F = G$.

□

3.5 Annexe : les formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant 0, à valeurs réelles ou complexes. Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{R_n(x)}$$

Corollaire. Pour $a \in I$, on a :

$$f(a+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k + \int_a^{a+x} \frac{(a+x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve. On raisonne par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, la formule proposée est le théorème fondamental :
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la formule vérifiée pour ce n. On considère alors f de classe $\mathcal{C}^{n+2}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \text{par H.R. à } f \text{ qui est } \mathcal{C}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_0^x \\
&\qquad - \int_0^x \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \text{par parties avec } f^{(n+1)} \text{ qui est } \mathcal{C}^1 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

- Par le principe de récurrence, la formule est établie pour tout n.

□

Inégalité de Taylor-Lagrange.

Si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $0 \in I$, alors :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{n+1}\|_\infty^I$$

Corollaire. Pour $a \in I$, on a :

$$\left| f(a+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{n+1}\|_\infty^I$$

3.6 Annexe : une démonstration du théorème sur les sommes de Riemann

Théorème.

Pour f k-lipschizienne sur $[a,b]$:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *Le résultat est vrai, et à utiliser, sous l'hypothèse moins forte que f est continue par morceaux sur $[a,b]$.*

Preuve. On ne traite que ici que le cas où f est k-lipschitzienne, par exemple lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, avec $\|f'\|_\infty \leqslant k$. On note :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big)$$

On calcule, en posant $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t) - S_n(f)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \Big(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) - f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(a_k) - f(t)|\,\mathrm{d}t\Big) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\int_{a_k}^{a_{k+1}} k(t-a_k)\,\mathrm{d}t\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \Big(k\left[\frac{(t-a_k)^2}{2}\right]_{a_k}^{a_{k+1}}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \Big(k\frac{(b-a)^2}{2n^2}\Big) \\
&= \frac{k(b-a)^2}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

□

3.7 Complément : une autre démonstration par la continuité uniforme

Définition. Soit f continue sur $[a,b]$.
Pour $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ subdivision de $[a,b]$, on appelle **pas** de la subdivision le réel $\delta(\sigma) = \underset{0\leqslant i\leqslant n-1}{\mathrm{Max}}\ x_{i+1} - x_i$.

Définition. On appelle **somme de Riemann** associée à f et σ toute somme qui peut s'écrire sous la forme :

$$R_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$$

où $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Remarque. *Dans le paragraphe précédent, les subdivisions considérées sont de pas $\dfrac{b-a}{n}$ et ξ_i est toujours choisi comme étant égal à x_i.*

Théorème.

Pour f continue par morceaux sur $[a,b]$.

$$R_\sigma(f) \xrightarrow[\delta(\sigma)\to 0]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve. On traite le cas des fonctions continues sur $[a,b]$, celui des fonctions continues par morceaux s'y ramenant comme au § 3.2.
On interprète $R_\sigma(f)$ comme l'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a,b]$:

$$R_\sigma(f) = \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t$$

où h est constante égale à $f(\xi_i)$ sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$.
Fixons $\varepsilon > 0$.
La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, donc est uniformément continue. Par définition appliquée à $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$, il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [a,b],\ |x-y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Si $\delta(\sigma) \leqslant \eta$, alors pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et tout $t \in]x_i, x_{i+1}[$:

$$|t - \xi_i| \leqslant x_{i+1} - x_i \leqslant \delta(\sigma) \leqslant \eta$$

donc :

$$|f(t) - h(t)| = |f(t) - f(\xi_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - R_\sigma(f)\right| &= \left|\int_a^b f(t) - h(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(t) - h(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

On a montré, en revenant à la définition, que :

$$R_\sigma(f) \xrightarrow[\delta(\sigma)\to 0]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

□

3.8 Annexe : deux primitives

Proposition. Sur $\mathbb{R}$:

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \mathrm{cte}$$

Preuve. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\mathrm{sh}^{-1}(x)} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 u}}\,\mathrm{ch}\,u\,\mathrm{d}u \\ &\qquad \text{en posant } t = \mathrm{sh}\,u,\ \mathrm{d}t = \mathrm{ch}\,u\,\mathrm{d}u \\ &\qquad u \text{ de } 0 \text{ à } \mathrm{sh}^{-1}(x) \\ &= \int_0^{\mathrm{sh}^{-1}(x)} 1\,\mathrm{d}u \\ &\qquad \text{car } \mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1 \\ &= \mathrm{sh}^{-1}(x)\end{aligned}$$

On résout donc l'équation :

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}\,y = x &\iff \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2} = x \\ &\iff \mathrm{e}^{2y} - 2\mathrm{e}^y x - 1 = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^y \text{ est racine de } t^2 - 2tx - 1 \\ &\iff \mathrm{e}^y = x \pm \sqrt{x^2+1} \text{ avec } \Delta = \dots \\ &\iff y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \text{ car } \mathrm{e}^y > 0\end{aligned}$$

donc $\mathrm{sh}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. □

Proposition. Sur $]1, +\infty[$:

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \mathrm{cte}$$

Preuve. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathrm{ch}^{-1}(2)}^{\mathrm{ch}^{-1}(x)} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 u - 1}}\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{d}u \\ &\qquad \text{en posant } t = \mathrm{ch}\,u,\ \mathrm{d}t = \mathrm{sh}\,u\,\mathrm{d}u \\ &\qquad u \text{ de } \mathrm{ch}^{-1}(2) \text{ à } \mathrm{ch}^{-1}(x) \\ &\qquad \mathrm{ch} \text{ réalise bijection } [0, +\infty[\to [1, +\infty[\\ &= \int_{\mathrm{ch}^{-1}(2)}^{\mathrm{ch}^{-1}(x)} \frac{sinhu}{\sqrt{\mathrm{sh}^2 u}}\,\mathrm{d}u \\ &\qquad \text{car } \mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1 \\ &= \int_{\mathrm{ch}^{-1}(2)}^{\mathrm{ch}^{-1}(x)} 1\,\mathrm{d}u \\ &\qquad \text{car } \mathrm{sh}\,u \geqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ &= \mathrm{ch}^{-1}(x) - \mathrm{ch}^{-1}(2)\end{aligned}$$

On résout donc l'équation, où $y \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} y = x &\iff \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2} = x \\
&\iff \mathrm{e}^{2y} - 2\mathrm{e}^y x + 1 = 0 \\
&\iff \mathrm{e}^y \text{ est racine de } t^2 - 2tx + 1 \\
&\iff \mathrm{e}^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \text{ avec } \Delta = \dots \\
&\iff y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) &= \ln\left(\frac{x - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right) \text{ quantité conjuguée} \\
&= -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})
\end{aligned}$$

Comme y est positif, on conserve la plus grande des deux valeurs, et donc $\operatorname{ch}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Lemme de Riemann-Lebesgue

64.1

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

Intégrale de Wallis

64.2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

(b) Donner une expression de I_n à l'aide de factorielles.

Utilisation d'une somme de Riemann

64.3

Déterminer un équivalent simple de :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2}$$

Utilisation d'une formule de Taylor

64.4

Utiliser une formule de Taylor pour montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Exercices du CCINP

64.5 79.1

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.

Exercices

64.6

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

64.7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction continue et T périodique. Montrer que la valeur de :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ne dépend pas du choix de a. On la note $\displaystyle\int_{[T]} f(t)\,\mathrm{d}t$.

64.8

Utiliser l'intégration par parties pour calculer :

(a) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_1^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^x t^3\sin t\,\mathrm{d}t$

64.9

Calculer la dérivée, sur $]1,+\infty[$, de :

$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

64.10

Montrer la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

64.11

Utiliser une formule de Taylor pour montrer que, pour tout $x \in \,]-1,1[$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Calculs d'intégrales et de primitives

64.12

Calculer les primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int^x \frac{\operatorname{Arctan}^2 t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int^x \frac{\operatorname{Arcsin} t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int^x \frac{1}{t\ln^5 t}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int^x \sin t\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int^x \frac{1}{\cos tw}\,\mathrm{d}t$

64.13

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \tan t \,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 t \,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \operatorname{Arctan} t \,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{t+\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 t \,\mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 t \,\mathrm{d}t$

(g) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} \,\mathrm{d}t$

64.14

Calculer les primitives des expressions suivantes :

(a) $\dfrac{1}{x^3-x}$

(b) $\dfrac{x-2}{x(x+1)^2}$

(c) $\dfrac{x+1}{x^3+x}$

(d) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+2}$

(e) $\dfrac{x}{x^3-1}$

(f) $\dfrac{x}{x^4+1}$

64.15

Déterminer une primitive des expressions suivantes :

(a) $\sin^4 x$

(b) $\sin x \cos^3 x$

(c) $\cos^5 x$

64.16

Déterminer une primitive des expressions suivantes :

(a) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

64.17

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, d'écriture algébrique $\lambda = a + ib$. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

$$t \mapsto \frac{1}{t-\lambda}$$

64.18

Calculer :

$$\int_0^{\pi} t\sin(t)\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$$

64.19

Calculer, par intégration par parties :

(a) $\displaystyle\int_0^1 (t-1)\mathrm{e}^{2t} \,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t^2+1) \,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin} t \,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin t \,\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t} \,\mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int_0^1 t(\operatorname{Arctan} t)^2 \,\mathrm{d}t$

64.20

Calculer :

$$\int_0^{\mathrm{e}^{\pi}} \sin(\ln t) \,\mathrm{d}t$$

Petits problèmes d'entrainement

64.21 ✍

On considère, pour $x > 0$:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \,\mathrm{d}t$$

Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

64.22 ✍

(a) Pour $\alpha \geqslant 0$, utiliser une somme de Riemann pour déterminer un équivalent simple de :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$$

(b) Vérifier le résultat pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$.

64.23

Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. On définit :

$$f \star g \;:\; x \mapsto \int_0^x f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $g \star f = f \star g$.

64.24

Pour $n \geqslant 2$, on pose :

$$w_n = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \;-\frac{1}{n}$$

(a) Écrire w_n sous la forme d'une seule intégrale sur $[n-1, n]$, puis montrer, par exemple à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$w_n = \int_{n-1}^{n} \frac{t-(n-1)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

(b) En déduire que :

$$w_n = \frac{1}{2n^2} + \int_{n-1}^{n} \frac{(t-(n-1))^2}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

puis que :

$$w_n = \frac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\big(\frac{1}{n^3}\big)$$

(c) En déduire que $\sum_{n\geqslant 2} w_n$ converge. On note σ sa somme.

(d) Montrer qu'il existe un réel M tel qu'à partir d'un rang n_0, on ait :

$$\left| w_n - \frac{1}{2n^2} \right| \leqslant \frac{M}{n^3}$$

En déduire que, pour $n \geqslant n_0$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \big(w_k - \frac{1}{2k^2}\big) \right| \leqslant \frac{M}{3n^2}$$

(e) Montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

(f) Conclure de tout ce qui précède l'existence d'une constante γ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\big(\frac{1}{n}\big)$$

64.25

Pour $x > 0$, on pose :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t}{1+t+t^2+t^3}\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(b) Calculer $F'(x)$ et en déduire une expression simple de $F(x)$, pour tout $x > 0$.

64.26

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et étudier sa parité.

(b) Déterminer la limite de f en 0.

On prolonge f par continuité en 0 à l'aide de la valeur obtenue.

(c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(d) Étudier la limite de f en $+\infty$.

64.27

Pour $x \in]0,1[$, on pose :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

et on pose $F(1) = \ln 2$.

(a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.
Pour $x \in]0,1[$, préciser le signe de $F'(x)$ et celui de $F(x)$.

(b) Montrer que, pour tout $t \in [\frac{1}{2}, 1[$:

$$0 \leqslant \frac{t-1}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{t}$$

En déduire que $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \overset{<}{\to} 1]{} 0$.

(c) Calculer, pour $x \in]0,1[$, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

(d) Montrer que F est continue en 1.

(e) Est-ce que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$?

64.28

Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1-\frac{k}{n}}$$

64.29

Déterminer les limites pour $n \to +\infty$ de :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}$

(c) $\displaystyle\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$

64.30

Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$