

Intégration sur un segment des fonctions numériques

Je me souviens	2
1 L'intégrale comme un nombre	2
1.1 Fonctions continues par morceaux	2
1.2 Intégrale d'une fonctions cpm sur un segment	2
1.3 Sommes de Riemann	2
2 L'intégrale comme une fonction de la borne d'en haut	2
2.4 Intégrale et primitive	2
2.5 Intégration par parties, changement de variable	2
2.6 Primitives usuelles	3
2.7 Formules de Taylor	3
Cours	4
3 Annexes	4
3.1 Annexe : intégrale d'une fonction en escalier sur un segment	4
3.2 Complément : approximation uniforme des fonctions cpm par des fonctions en escalier	4
3.3 Annexe : une construction de l'intégrale des fonctions cpm sur un segment	5
3.4 Complément : démonstration du théorème fondamental	5
3.5 Annexe : les formules de Taylor	6
3.6 Annexe : une démonstration du théorème sur les sommes de Riemann	6
3.7 Complément : une autre démonstration par la continuité uniforme	7
3.8 Annexe : deux primitives	7
Exercices	9
Exercices et résultats classiques à connaître	9
Lemme de Riemann-Lebesgue	9
Intégrale de Wallis	9
Utilisation d'une somme de Riemann	9
Utilisation d'une formule de Taylor	9
Exercices du CCINP	10
Exercices classiques	10
Calculs d'intégrales et de primitives	10
Petits problèmes d'entraînement	11

Je me souviens — l'intégrale comme un nombre

1.1 Fonctions continues par morceaux

1. Qu'est-ce qu'une **subdivision** du segment $[a, b]$?
2. Qu'est-ce qu'une fonction **continue par morceaux** sur $[a, b]$?
3. Que dire d'une combinaison linéaire de deux fonctions continues par morceaux? d'un produit de deux fonctions continues par morceaux?
4. Prêt à le démontrer?
5. Est-ce que l'ensemble $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ possède une structure particulière?

1.2 Intégrale d'une fonctions cpm sur un segment

6. Quel est le lien entre $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_b^a f(t) dt$?
7. Énoncer la relation de Chasles.
8. Qu'est-ce que la linéarité de l'intégrale?
9. Qu'est-ce que la positivité de l'intégrale? la croissance de l'intégrale?
10. Qu'est-ce que l'inégalité triangulaire pour les intégrales?
11. Que dire face à une intégrale nulle d'une fonction positive?

1.3 Sommes de Riemann

12. Que dit le théorème sur les sommes de Riemann?

Je me souviens — l'intégrale comme une fonction de la borne d'en haut

2.4 Intégrale et primitive

13. Qu'appelle-t-on **primitive** d'une fonction f ?
14. Quelle est la classe des primitives de fonctions continues?
15. Que dire de deux primitives d'une même fonction sur un intervalle?
16. Énoncer le théorème fondamental, qui fait le lien entre intégrale et primitive.
17. Si f est continue, comment dériver $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$?

2.5 Intégration par parties, changement de variable

18. Qu'appelle-t-on « intégration par parties »?
19. Comment faire un changement de variable pour le calcul d'une intégrale?

2.6 Primitives usuelles

20. Donner une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
21. Donner une primitive de $\ln x$.
22. Donner une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$.
23. Donner une primitive de $\frac{1}{1-x^2}$.
24. Donner une primitive de $\frac{1}{1+x+x^2}$.

2.7 Formules de Taylor

25. Qu'est-ce que le polynôme de Taylor d'une fonction ?
26. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
27. Comment démontrer la formule précédente ?
28. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

3 Annexes

3.1 Annexe : intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

Définition. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est en **escalier** lorsqu'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ du segment $[a, b]$ telle que, pour tout i , la restriction $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ soit une fonction constante. On note k_i sa valeur. On dit que la subdivision est **adaptée** à f .

On appelle **intégrale de f sur $[a, b]$** le nombre :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} k_i(x_{i+1} - x_i)$$

que l'on interprète géométriquement comme on le pense.

Remarque. Cette définition est indépendante du choix de la subdivision adaptée à f .

Notation. On note indifféremment $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b f$, $\int_{[a,b]} f(t) dt$ ou $\int_{[a,b]} f$. Il n'est pas toujours judicieux de vouloir faire l'économie de l'écriture de la variable d'intégration.

Proposition. Pour f, g en escalier sur $[a, b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$.
- Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
- Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

3.2 Complément : approximation uniforme des fonctions cpm par des fonctions en escalier

Proposition. L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est dense dans $(\mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, ce qui signifie que toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Preuve. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On veut construire une suite de fonctions en escalier qui tend, au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$, vers f .

- 1^{er} cas : si f est continue.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[a, b]$. Ainsi, par définition appliquée à $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$, il existe $\eta_n > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| \leq \eta_n \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Considérons alors p entier tel que $\frac{b-a}{p} < \eta_n$, la subdivision régulière de $[a, b]$ $\left(x_k = a + k \frac{b-a}{p}\right)_{0 \leq k \leq p}$ et la fonction en escalier :

$$\forall k \in \{0, \dots, p-1\}, \forall x \in [x_k, x_{k+1}[, g_n(x) = f(x_k)$$

complétée par $g_n(b) = f(b)$.
La fonction g_n ainsi définie est constante sur chaque $[x_k, x_{k+1}[$, donc en escalier.
De plus, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $k \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $x \in [x_k, x_{k+1}[$, donc $|x - x_k| \leq \frac{b-a}{p} < \eta_n$ et par suite :

$$|f(x) - g_n(x)| = |f(x) - f(x_k)| \leq \frac{1}{n}$$

La majoration, aussi valable pour $x = b$, est indépendante de x donc :

$$\|f - g_n\|_\infty^{[a,b]} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc montré que $(g_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

- 2^e cas : si f est continue par morceaux.
On considère $(y_j)_{0 \leq j \leq q}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f , c'est-à-dire que chaque $f|_{]y_j, y_{j+1}[}$ est continue et admet une limite finie à droite en y_j et à gauche en y_{j+1} . Elle se prolonge donc à $[y_j, y_{j+1}]$ en une fonction continue notée f_j .
On applique à f_j le point précédent, ce qui fournit une suite $(g_n^j)_n$ qui converge uniformément vers f_j sur $[y_j, y_{j+1}]$.
On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, b]$:

$$h_n(x) = \begin{cases} g_n^j(x) & \text{si } x \in]y_j, y_{j+1}[\\ f(y_j) & \text{si } x = y_j \end{cases}$$

La fonction h_n est en escalier sur $[a, b]$, et, pour tout x ,
 $|f(x) - h_n(x)| = \begin{cases} |f_j(x) - g_n^j(x)| \leq \frac{1}{n} & \text{si } x \in]y_j, y_{j+1}[\\ 0 \leq \frac{1}{n} & \text{si } x = y_j \end{cases}$

donc
$$\|f - h_n\|_\infty^{[a,b]} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc montré que $(h_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$. □

Corollaire. Si f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, à valeurs réelles, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ, ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi - \varphi \leq \varepsilon$$

Preuve. Par la proposition précédente, on sait qu'il existe ψ en escalier telle que $\|(f + \frac{\varepsilon}{4}) - \psi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4}$, c'est-à-dire :

$$f \leq \psi \leq f + \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $\varphi = \psi - \frac{\varepsilon}{2}$. □

3.3 Annexe : une construction de l'intégrale des fonctions cpm sur un segment

Construction. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. On considère :

$$\mathcal{I}^-(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \varphi \leq f \right\}$$

$$\mathcal{I}^+(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \psi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), f \leq \psi \right\}$$

$\mathcal{I}^-(f)$ admet une borne supérieure, $\mathcal{I}^+(f)$ admet une borne inférieure, et :

$$\text{Sup } \mathcal{I}^-(f) = \text{Inf } \mathcal{I}^+(f)$$

Cette valeur commune s'appelle l'intégrale de f sur $[a, b]$.

Preuve.

- f est continue par morceaux sur $[a, b]$, donc il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ adaptée à f , c'est-à-dire telle que, pour tout i , la restriction $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ se prolonge à $[x_i, x_{i+1}]$ en une fonction continue, donc bornée. On note M_i un majorant. Alors $M = \text{Max}\{f(x_0), \dots, f(x_n), M_0, \dots, M_{n-1}\}$ est un majorant

de f sur $[a, b]$. C'est aussi une fonction en escalier (constante) majorant f , donc $M(b-a)$ majore $\mathcal{I}^-(f)$. Ainsi, $\mathcal{I}^-(f)$ est une partie non vide, majorée, de \mathbb{R} , donc admet une borne supérieure. On la note S .

- $\mathcal{I}^+(f)$ admet une borne inférieure pour des raisons analogues. On la note I .
- $\forall \varphi, \psi$ en escalier telles que $\varphi \leq f \leq \psi$, on a $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$. Comme ceci est vrai pour tout φ , c'est que $\int_a^b \psi$ est un majorant, donc par définition de la borne sup, $S \leq \int_a^b \psi$. Mais ceci est vrai pour tout ψ , donc S est un minorant et par définition de la borne inf, $S \leq I$.
- Fixons $\varepsilon > 0$. En appliquant le corollaire de la section précédente avec $\frac{\varepsilon}{b-a}$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi - \varphi \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

On a $\int_a^b \varphi \leq S \leq I \leq \int_a^b \psi$, donc :

$$I - S \leq \int_a^b \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, c'est que $I - S \leq 0$.

On a montré que $I = S$. □

3.4 Complément : démonstration du théorème fondamental

Théorème.

Soit I intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue et $a \in I$. Il existe une unique primitive de f sur I qui s'annule en a , et cette primitive est :

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

Preuve.

- Existence*
Définissons, pour $x \in I : F(x) = \int_a^x f(t) dt$.
On veut montrer que F est une primitive de f sur I , c'est-à-dire que, pour tout $x \in I :$

$$F(x+h) = F(x) + hf(x) + o_{h \rightarrow 0}(h)$$

Soit $x \in I$ fixé. Si x est une extrémité de I , un seul des points suivants s'applique.

- Au voisinage de $h \gtrsim 0, x+h \in I$ et :

$$F(x+h) - F(x) - hf(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt - hf(x)$$

$$= \int_x^{x+h} f(t) - f(x) dt$$

donc

$$|F(x+h) - F(x) - hf(x)| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt$$

On revient à la définition de limite avec des ε . Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par définition de la continuité de f en x , il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall y \in I, |y-x| \leq \eta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Lorsque $h \leq \eta$, tout $t \in [x, x+h]$ satisfait $|t-x| \leq \eta$, donc $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$. On a donc, pour $h \leq \eta :$

$$|F(x+h) - F(x) - hf(x)| \leq \int_x^{x+h} \varepsilon dt$$

$$= \varepsilon h$$

- Au voisinage de $h \lesssim 0$, on travaille de façon symétrique en faisant attention à l'ordre des bornes d'intégration.

On a donc montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,$$

$$|h| \leq \eta \implies |F(x+h) - F(x) - hf(x)| \leq \varepsilon h$$

c'est-à-dire :

$$F(x+h) - F(x) - hf(x) = o_{h \rightarrow 0}(h)$$

Ce qui prouve que F est dérivable en x , et que $F'(x) = f(x)$.

- Unicité*
Si F et G conviennent, pour tout $x \in I :$

$$(F - G)'(x) = 0$$

Il s'agit d'une fonction dérivable à dérivée nulle sur un intervalle, donc $F - G$ est constante, c'est donc que $F = G$. □

3.5 Annexe : les formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit f de classe \mathcal{C}^{n+1} sur un intervalle I contenant 0, à valeurs réelles ou complexes. Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}_{R_n(x)}$$

Corollaire. Pour $a \in I$, on a :

$$f(a+x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k + \int_a^{a+x} \frac{(a+x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt$$

Preuve. On raisonne par récurrence sur n .

- Pour $n = 0$, la formule proposée est le théorème fondamental :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la formule vérifiée pour ce n . On

considère alors f de classe \mathcal{C}^{n+2} . On calcule :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &\text{par H.R. à } f \text{ qui est } \mathcal{C}^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_0^x \\ &\quad - \int_0^x \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &\text{par parties avec } f^{(n+1)} \text{ qui est } \mathcal{C}^1 \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

- Par le principe de récurrence, la formule est établie pour tout n . □

Inégalité de Taylor-Lagrange.

Si f est \mathcal{C}^{n+1} sur I et $0 \in I$, alors :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{n+1}\|_{I_\infty}$$

Corollaire. Pour $a \in I$, on a :

$$\left| f(a+x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{n+1}\|_{I_\infty}$$

3.6 Annexe : une démonstration du théorème sur les sommes de Riemann

Théorème.

Pour f k -lipschizienne sur $[a, b]$:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

Remarque. Le résultat est vrai, et à utiliser, sous l'hypothèse moins forte que f est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Preuve. On ne traite que ici que le cas où f est k -lipschitzienne, par exemple lorsque f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, avec $\|f'\|_\infty \leq k$. On note :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

On calcule, en posant $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - S_n(f) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) - f(t) dt \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(a_k) - f(t)| dt \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} k(t - a_k) dt \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(k \left[\frac{(t - a_k)^2}{2} \right]_{a_k}^{a_{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(k \frac{(b-a)^2}{2n^2} \right) \\ &= \frac{k(b-a)^2}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

□

3.7 Complément : une autre démonstration par la continuité uniforme

Définition. Soit f continue sur $[a, b]$.

Pour $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ subdivision de $[a, b]$, on appelle **pas** de la subdivision le réel $\delta(\sigma) = \max_{0 \leq i \leq n-1} x_{i+1} - x_i$.

Définition. On appelle **somme de Riemann** associée à f et σ toute somme qui peut s'écrire sous la forme :

$$R_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$$

où $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Remarque. Dans le paragraphe précédent, les subdivisions considérées sont de pas $\frac{b-a}{n}$ et ξ_i est toujours choisi comme étant égal à x_i .

Théorème.

Pour f continue par morceaux sur $[a, b]$.

$$R_\sigma(f) \xrightarrow{\delta(\sigma) \rightarrow 0} \int_a^b f(t) dt$$

Preuve. On traite le cas des fonctions continues sur $[a, b]$, celui des fonctions continues par morceaux s'y ramenant comme au § 3.2.

On interprète $R_\sigma(f)$ comme l'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a, b]$:

$$R_\sigma(f) = \int_a^b h(t) dt$$

où h est constante égale à $f(\xi_i)$ sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$. Fixons $\varepsilon > 0$.

La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, donc est uniformément continue. Par définition appliquée à $\frac{\varepsilon}{b-a}$, il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Si $\delta(\sigma) \leq \eta$, alors pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et tout $t \in]x_i, x_{i+1}[$:

$$|t - \xi_i| \leq x_{i+1} - x_i \leq \delta(\sigma) \leq \eta$$

donc :

$$|f(t) - h(t)| = |f(t) - f(\xi_i)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - R_\sigma(f) \right| &= \left| \int_a^b f(t) - h(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - h(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

On a montré, en revenant à la définition, que :

$$R_\sigma(f) \xrightarrow{\delta(\sigma) \rightarrow 0} \int_a^b f(t) dt$$

□

3.8 Annexe : deux primitives

Proposition. Sur \mathbb{R} :

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \text{cte}$$

Preuve. On calcule :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt &= \int_0^{\text{sh}^{-1}(x)} \frac{1}{\sqrt{1+\text{sh}^2 u}} \text{ch } u du \\ &\text{en posant } t = \text{sh } u, dt = \text{ch } u du \\ &\text{u de } 0 \text{ à } \text{sh}^{-1}(x) \\ &= \int_0^{\text{sh}^{-1}(x)} 1 du \\ &\text{car } \text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1 \\ &= \text{sh}^{-1}(x) \end{aligned}$$

On résout donc l'équation :

$$\begin{aligned} \text{sh } y = x &\iff \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \\ &\iff e^{2y} - 2e^y x - 1 = 0 \\ &\iff e^y \text{ est racine de } t^2 - 2tx - 1 \\ &\iff e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1} \text{ avec } \Delta = \dots \\ &\iff y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \text{ car } e^y > 0 \end{aligned}$$

donc $\text{sh}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

□

Proposition. Sur $]1, +\infty[$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + \text{cte}$$

Preuve. On calcule :

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt &= \int_{\text{ch}^{-1}(2)}^{\text{ch}^{-1}(x)} \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2 u - 1}} \text{sh } u du \\ &\text{en posant } t = \text{ch } u, dt = \text{sh } u du \\ &\text{u de } \text{ch}^{-1}(2) \text{ à } \text{ch}^{-1}(x) \\ &\text{ch réalise bijection } [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[\\ &= \int_{\text{ch}^{-1}(2)}^{\text{ch}^{-1}(x)} \frac{\text{sinh } u}{\sqrt{\text{sh}^2 u}} du \\ &\text{car } \text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1 \\ &= \int_{\text{ch}^{-1}(2)}^{\text{ch}^{-1}(x)} 1 du \\ &\text{car } \text{sh } u \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ &= \text{ch}^{-1}(x) - \text{ch}^{-1}(2) \end{aligned}$$

On résout donc l'équation, où $y \geq 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} y = x &\iff \frac{e^y + e^{-y}}{2} = x \\ &\iff e^{2y} - 2e^y x + 1 = 0 \\ &\iff e^y \text{ est racine de } t^2 - 2tx + 1 \\ &\iff e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \text{ avec } \Delta = \dots \\ &\iff y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) &= \ln\left(\frac{x - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right) \text{ quantité conjuguée} \\ &= -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned}$$

Comme y est positif, on conserve la plus grande des deux valeurs, et donc $\operatorname{ch}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. \square

Exercices et résultats classiques à connaître**Lemme de Riemann-Lebesgue****64.1**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que :

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$$

Intégrale de Wallis**64.2**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

(b) Donner une expression de I_n à l'aide de factorielles.

Utilisation d'une somme de Riemann**64.3**

Déterminer un équivalent simple de :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + n^2}$$

Utilisation d'une formule de Taylor**64.4**

Utiliser une formule de Taylor pour montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Exercices du CCINP

64.5



Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Démontrer que $\int_a^b h(x) dx = 0 \implies h = 0$.

Exercices

64.6

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$$

64.7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et T périodique. Montrer que la valeur de :

$$\int_a^{a+T} f(t) \, dt$$

ne dépend pas du choix de a . On la note $\int_{[T]} f(t) \, dt$.

64.8

Utiliser l'intégration par parties pour calculer :

$$\begin{array}{l|l} \text{(a)} \int_0^x e^{-t} \sin t \, dt & \text{(c)} \int_1^x \frac{\text{Arctan } t}{t^2} \, dt \\ \text{(b)} \int_1^x \frac{\ln t}{t^3} \, dt & \text{(d)} \int_0^x t^3 \sin t \, dt \end{array}$$

64.9

Calculer la dérivée, sur $]1, +\infty[$, de :

$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

64.10

Montrer la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

64.11

Utiliser une formule de Taylor pour montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Calculs d'intégrales et de primitives

64.12

Calculer les primitives suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \text{(a)} \int \frac{\text{Arctan}^2 t}{1+t^2} \, dt & \text{(d)} \int \sin t e^{2t} \, dt \\ \text{(b)} \int \frac{\text{Arcsin } t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt & \text{(e)} \int \frac{e^{2t}}{1+e^t} \, dt \\ \text{(c)} \int \frac{1}{t \ln^5 t} \, dt & \text{(f)} \int \frac{1}{\cos tw} \, dt \end{array}$$

64.13

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \tan t \, dt$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 t \, dt$

(c) $\int_0^1 \operatorname{Arctan} t \, dt$

(d) $\int_0^1 \frac{1}{t + \sqrt{1-t^2}} \, dt$

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 t \, dt$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 t \, dt$

(g) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} \, dt$

64.14

Calculer les primitives des expressions suivantes :

(a) $\frac{1}{x^3 - x}$

(b) $\frac{x-2}{x(x+1)^2}$

(c) $\frac{x+1}{x^3 + x}$

(d) $\frac{x-1}{x^2 + 2x + 2}$

(e) $\frac{x}{x^3 - 1}$

(f) $\frac{x}{x^4 + 1}$

64.15

Déterminer une primitive des expressions suivantes :

(a) $\sin^4 x$

(b) $\sin x \cos^3 x$

(c) $\cos^5 x$

64.16

Déterminer une primitive des expressions suivantes :

(a) $\frac{1}{a^2 + x^2}$

(b) $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

64.17Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, d'écriture algébrique $\lambda = a + ib$. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de :

$$t \mapsto \frac{1}{t - \lambda}$$

64.18

Calculer :

$$\int_0^{\pi} t \sin(t) e^{-t} \, dt$$

64.19

Calculer, par intégration par parties :

(a) $\int_0^1 (t-1)e^{2t} \, dt$

(b) $\int_0^1 \ln(t^2 + 1) \, dt$

(c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin} t \, dt$

(d) $\int_0^{\pi} t \sin t \, dt$


(e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t} \, dt$

(f) $\int_0^1 t(\operatorname{Arctan} t)^2 \, dt$


64.20

Calculer :

$$\int_0^{e^{\pi}} \sin(\ln t) \, dt$$

Petits problèmes d'entraînement**64.21** On considère, pour $x > 0$:

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{x+t} \, dt$$

Démontrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et donner l'expression de sa dérivée. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .**64.22** 

- (a) Pour $\alpha \geq 0$, utiliser une somme de Riemann pour déterminer un équivalent simple de :

$$v_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$$

- (b) Vérifier le résultat pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$.

64.23

Soit f et g deux fonctions continues sur \mathbb{R}_+ . On définit :

$$f \star g : x \mapsto \int_0^x f(x-t)g(t) dt$$

Montrer que $g \star f = f \star g$.

64.24

Pour $n \geq 2$, on pose :

$$w_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n}$$

- (a) Écrire w_n sous la forme d'une seule intégrale sur $[n-1, n]$, puis montrer, par exemple à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$w_n = \int_{n-1}^n \frac{t - (n-1)}{t^2} dt$$

- (b) En déduire que :

$$w_n = \frac{1}{2n^2} + \int_{n-1}^n \frac{(t - (n-1))^2}{t^3} dt$$

puis que :

$$w_n = \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

- (c) En déduire que $\sum_{n \geq 2} w_n$ converge. On note σ sa somme.

- (d) Montrer qu'il existe un réel M tel qu'à partir d'un rang n_0 , on ait :

$$\left| w_n - \frac{1}{2n^2} \right| \leq \frac{M}{n^3}$$

En déduire que, pour $n \geq n_0$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(w_k - \frac{1}{2k^2} \right) \right| \leq \frac{M}{3n^2}$$

- (e) Montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

- (f) Conclure de tout ce qui précède l'existence d'une constante γ telle que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

64.25

Pour $x > 0$, on pose :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{t}{1+t+t^2+t^3} dt$$

- (a) Montrer que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
 (b) Calculer $F'(x)$ et en déduire une expression simple de $F(x)$, pour tout $x > 0$.

64.26

Soit f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$$

- (a) Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R}^* , et étudier sa parité.
 (b) Déterminer la limite de f en 0.

On prolonge f par continuité en 0 à l'aide de la valeur obtenue.

- (c) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} .
 (d) Étudier la limite de f en $+\infty$.

64.27

Pour $x \in]0, 1[$, on pose :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

et on pose $F(1) = \ln 2$.

- (a) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$.
Pour $x \in]0, 1[$, préciser le signe de $F'(x)$ et celui de $F(x)$.
- (b) Montrer que, pour tout $t \in [\frac{1}{2}, 1[$:

$$0 \leq \frac{t-1}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{t}$$

En déduire que $\int_x^{x^2} \frac{t-1}{t \ln(t)} dt \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$.

- (c) Calculer, pour $x \in]0, 1[$, $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$.
- (d) Montrer que F est continue en 1.
- (e) Est-ce que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$?

64.28

Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 - \frac{k}{n}}$$

64.29

Déterminer les limites pour $n \rightarrow +\infty$ de :

(a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

(b) $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}$

(c) $\frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$

64.30

Montrer que, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

64.31

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt) \cos^n t dt$$

64.32

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{n\pi} t |\sin t| dt$$

64.33

(a) Justifier :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right) dt$$

(b) En déduire la valeur de :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt$$

64.34

Soit $\alpha \in]0, \pi[$. En utilisant le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$, calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos x \cos \alpha} dx$$

64.35

Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = -i \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

64.36

Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Déterminer la limite pour $n \rightarrow +\infty$ de :

$$\int_0^\pi f(t) |\sin(nt)| dt$$

64.37

(a) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. À quelle condition portant sur f a-t-on l'égalité :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$$

(b) Et si f est à valeurs complexes ?

64.38

Calculer :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\text{Arcsin } t} dt$$

64.39

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$X^{2n} - 1 = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)$$

(b) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Déduire du calcul précédent la valeur de :

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos t + 1) dt$$

64.40

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} . On suppose :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } f^{(n+1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$f^{(k)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$