

Intégration - focus sur l'intégration des relations de comparaison

Cours	2
1 Intégration des relations de comparaison	2
1.1 Intégrale généralisée en $+\infty$	2
1.2 Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque	3
Exercices	5
Exercices et résultats classiques à connaître	5
Comportement d'Arcsin en 1	5
Deux exemples d'intégration des relations de comparaison	5
Exercices	6
Petits problèmes d'entraînement	6

1 Intégration des relations de comparaison

1.1 Intégrale généralisée en $+\infty$

1.1.1 Cas d'intégrabilité, résultat sur les restes

Théorème.

Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

- Si $f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{O}(g(x))$ et g intégrable en $+\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les restes :

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{O} \left(\int_x^{+\infty} g(t) dt \right)$$

- Si $f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(g(x))$ et g intégrable en $+\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les restes :

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\int_x^{+\infty} g(t) dt \right)$$

- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ et g intégrable en $+\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les restes :

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g(t) dt$$

Remarque. Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont petites, qui tendent vers 0.

1.1.2 Cas de non intégrabilité, résultat sur les intégrales partielles

Théorème.

Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.

- Si $f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{O}(g(x))$ et g non intégrable en $+\infty$, alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t) dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{O} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

- Si $f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(g(x))$ et g non intégrable en $+\infty$, alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t) dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ et g non intégrable en $+\infty$, alors f n'est pas intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_a^x g(t) dt$$

Remarque. Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont grandes, qui tendent vers $+\infty$.

Remarque. Dans les deux premiers points, on n'a pas d'information sur la convergence ou la divergence de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, mais le résultat n'a pas d'intérêt lorsque $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

1.2 Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Le résultat précédent s'adapte pour une intégrale généralisée à gauche en $b \in]-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ou généralisée à droite en $a \in [-\infty, +\infty[= \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

1.2.1 Cas d'intégrabilité, résultat sur les restes

Théorème.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a, b[$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a, b[$.

- Si $f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$ et g intégrable en b , alors f est intégrable en b et on peut comparer les restes :

$$\int_x^b f(t) dt = O_{x \rightarrow b} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$$

- Si $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$ et g intégrable en b , alors f est intégrable en b et on peut comparer les restes :

$$\int_x^b f(t) dt = o_{x \rightarrow b} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$$

- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \sim_{x \rightarrow b} g(x)$ et g intégrable en b , alors f est intégrable en b et on peut comparer les restes :

$$\int_x^b f(t) dt \sim_{x \rightarrow b} \int_x^b g(t) dt$$

Théorème.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $]a, b]$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $]a, b]$.

- Si $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$ et g intégrable en a , alors f est intégrable en a et on peut comparer les restes :

$$\int_a^x f(t) dt = O_{x \rightarrow a} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

- Si $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ et g intégrable en a , alors f est intégrable en a et on peut comparer les restes :

$$\int_a^x f(t) dt = o_{x \rightarrow a} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ et g intégrable en a , alors f est intégrable en a et on peut comparer les restes :

$$\int_a^x f(t) dt \sim_{x \rightarrow a} \int_a^x g(t) dt$$

1.2.2 Cas de non intégrabilité, résultat sur les intégrales partielles

Théorème.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a, b[$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a, b[$.

- Si $f(x) = O_{x \rightarrow b}(g(x))$ et g non intégrable en b , alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t) dt = O_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

- Si $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$ et g non intégrable en b , alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t) dt = o_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \sim_{x \rightarrow b} g(x)$ et g non intégrable en b , alors f n'est pas intégrable en b et on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t) dt \sim_{x \rightarrow b} \int_a^x g(t) dt$$

Théorème.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $]a, b]$, g une fonction réelle positive continue par morceaux sur $]a, b]$.

- Si $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$ et g non intégrable en a , alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_x^b f(t) dt = O_{x \rightarrow a} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$$

- Si $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ et g non intégrable en a , alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_x^b f(t) dt = o_{x \rightarrow a} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$$

- Si f est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ et g non intégrable en a , alors f n'est pas intégrable en b et on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_x^b f(t) dt \sim_{x \rightarrow a} \int_x^b g(t) dt$$

Exercices et résultats classiques à connaître**Comportement d'Arcsin en 1****651.1**

Utiliser l'intégration des relations de comparaison pour déterminer un équivalent, pour $x \nearrow 1$, de :

$$\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)$$

Deux exemples d'intégration des relations de comparaison**651.2**

Déterminer un équivalent simple de :

(a) $\int_x^1 \frac{dt}{e^t - 1}$ lorsque $x \nearrow 0$.

(b) $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + 1}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Exercices

651.3

Déterminer un équivalent simple, au voisinage de $x \rightarrow +\infty$, de :

$$\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} dt$$

651.4

Déterminer un équivalent, au voisinage de $x \rightarrow +\infty$, de :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

651.5

Déterminer un équivalent, au voisinage de $x \rightarrow +\infty$, de :

$$\int_x^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$$

Petits problèmes d'entraînement

651.6

Déterminer un équivalent simple, au voisinage de $x \rightarrow 0$, de :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

651.7

On considère, pour $x > 0$: $f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2(t)}{t} dt$.

(a) Déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \rightarrow 0$.

(b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$.

651.8

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $x \rightarrow +\infty$ de :

$$\int_e^x \frac{dt}{\ln t}$$

651.9

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $x \rightarrow +\infty$ de :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

651.10

Déterminer un développement asymptotique à trois termes, au voisinage de $x \rightarrow +\infty$, de :

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

651.11

(a) Justifier que :

$$\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

(b) Établir qu'il existe un réel C tel que, pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C + \varepsilon(x) \text{ où } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

(c) Déterminer un équivalent de $\varepsilon(x)$ en $+\infty$.