# Intégration sur un intervalle quelconque

# 1 Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$

Dans cette section, $a$ désigne un réel fixé.

## 1.1 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

**Définition.** Soit $I$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que $f$ est **continue par morceaux** sur $I$ si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout segment de $I$.

**Exemple.** Les fonctions suivantes sont-elles continues par morceaux sur l'intervalle $]0, 1]$ ?

$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$

$f_2 : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$

$f_3 : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

$f_4 : x \mapsto \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$

**Proposition.** Les fonctions continues sont continues par morceaux.

**Proposition.** Les fonctions continues par morceaux sont localement bornées, i.e. :

$$\forall x_0 \in I,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } f_{|]x_0-\eta, x_0+\eta[} \text{ bornée}$$

ou encore :

$$\forall x_0 \in I,\ \exists \eta > 0,\ \exists M \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ |f(x)| \leqslant M$$

## 1.2 Intégrale convergente, intégrale divergente

**Définition.** Soit $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'**intégrale généralisée** :

$$\int_a^{\to +\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

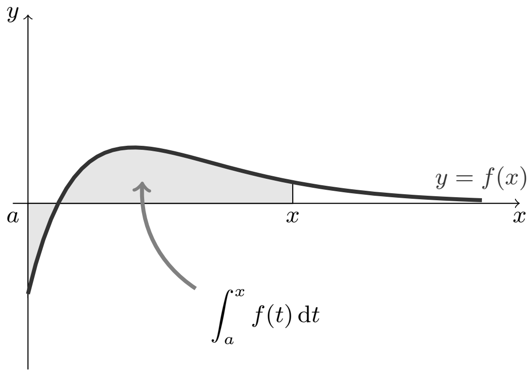
**converge** (ou existe) si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie $\ell$ lorsque $x \to +\infty$. Dans ce cas, on note :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$$

On dit que l'intégrale généralisée **diverge** sinon.

**Remarque.** *L'intégrale* $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *pourrait être appelée « intégrale partielle » de l'intégrale généralisée.*

*Interprétation géométrique :*




**Caractère local de la convergence.** Soit $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. La convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\dots}^{\to +\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du choix dans $[a, +\infty[$ de la borne d'en bas.

**Remarque.** *Ainsi, on peut dès maintenant retenir que la convergence d'une intégrale généralisée en $+\infty$ dépend seulement du comportement de l'intégrande au voisinage de $+\infty$.*

**Exemple.** Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_{\mathrm{e}}^{\to+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \cos t\,\mathrm{d}t$$

**Remarque.** *Les techniques d'étude de convergence seront étudiées un peu plus loin, et consisteront principalement à comparer l'intégrande à des fonctions de références. Pour les exemples qui précèdent, on travaille sur l'intégrale partielle, en revenant à la définition, ce qui ne sera pas le réflexe à avoir. Il s'agit en effet d'exemples (rares en pratique) où l'on peut exprimer une primitive de l'intégrande à l'aide des fonctions usuelles.*

**Proposition.** Lorsque $f$ est à valeurs complexes, $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} \mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} \mathrm{Im}(f)$ convergent.

**Exemple.** Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \cos(\omega t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

### 1.3 Cas des fonctions positives

**Lemme.** Dans le cas où l'intégrande est à valeurs positives, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

**Remarque.** *Lorsque $f$ est positive, on autorise l'écriture $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$ en cas de divergence.*
*Un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de la convergence de l'intégrale.*

### 1.4 Primitive et intégrale généralisée

**Proposition.** Si $f$ est continue sur $[a, +\infty[$, et que l'intégrale $\displaystyle\int^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale fonction de la borne d'en bas :

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable, de dérivée $x \mapsto -f(x)$.

## 2 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

**Remarque.** *Sans autre précision, dans cette section, $a$ et $b$ sont tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $I$ désigne un intervalle dont les extrémités sont $a$ et $b$.*
*Lorsque $a$ et $b$ sont finis et $I = [a, b]$, il s'agit d'un segment.*
*Lorsque $a$ est fini, $b = +\infty$ et $I = [a, +\infty[$, il s'agit du cas étudié au paragraphe précédent.*

### 2.1 Intégrale convergente, intégrale divergente

**Définition.** Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$.

- Lorsque $I = [a, b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \underset{x<b}{\longrightarrow} b$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.
- Lorsque $I = ]a, b]$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to a}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \underset{x>a}{\longrightarrow} a$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

- Lorsque $I = ]a, b[$, on dit que l'intégrale est **doublement généralisée**.

  Prenant $c$ tel que $a < c < b$, on dit qu'elle converge si et seulement si $\displaystyle\int_{\to a}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

  Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ la somme de ces deux intégrales convergentes.

**Remarque.** *Par le caractère local, cette double convergence ne dépend pas du choix de $c$. Par la relation de Chasles, la valeur de l'intégrale ne dépend pas du choix de $c$.*

**Proposition.** Lorsque $a$ (resp. $b$) est fini, et que $f$ se prolonge par continuité en $a$ (resp. $b$), alors l'intégrale généralisée en $a$ (resp. $b$) converge et sa valeur coïncide avec l'intégrale de la fonction prolongée. On dit que l'intégrale est **faussement généralisée**.

**Remarque.** *Ça n'aurait aucun sens de parler d'intégrale faussement généralisée en $\pm\infty$.*

**Exemple.** Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

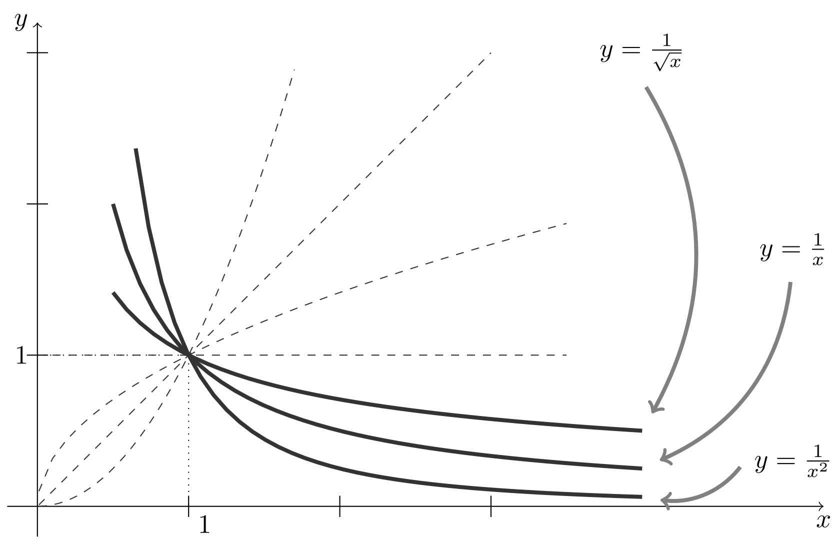
## 2.2 Cas des fonctions positives

**Remarque.** *Lorsque $f$ est positive, on autorise l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$ en cas de divergence.*
*Un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de la convergence de l'intégrale.*

## 2.3 Exemples de référence

**Intégrales de Riemann en $+\infty$.**

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

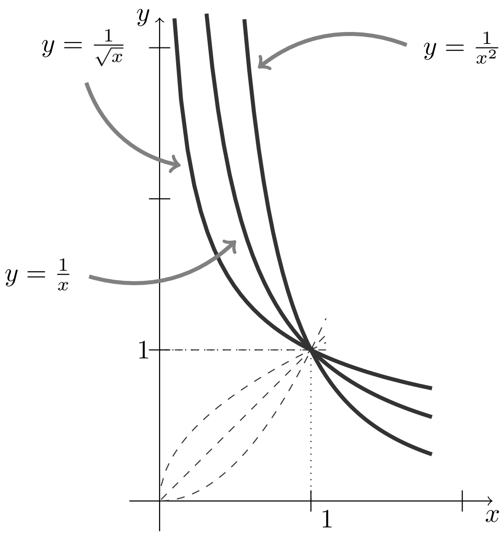



**Exponentielle en $+\infty$.**

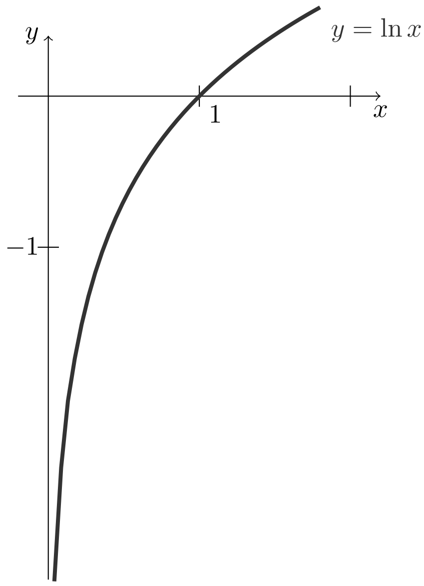
L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

**Intégrales de Riemann en $0$.**

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.




**Logarithme en** $0$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \ln t \, \mathrm{d}t$ converge. Sa valeur est négative.




## 2.4 Propriétés

**Linéarité.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $I$, $\lambda$ et $\mu$ deux scalaires. Si les intégrales généralisées $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors $\displaystyle\int_I \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_I \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$$

**Corollaire.** Si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_I f(t) + g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

**Remarque.** *Que penser de l'écriture :*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)}\,\mathrm{d}t\ ?$$

**Positivité.** Soit $f$ une fonction cpm sur $I$ d'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ convergente.

Si $\forall t \in I,\ f(t) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

**Croissance.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions cpm sur $I$, d'intégrales généralisées sur $I$ convergentes.

Si $\forall t \in I,\ f(t) \leqslant g(t)$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Remarque.** *Pour les intégrales généralisées convergentes, lorsque $a > b$, on définit par convention :*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

**Relation de Chasles.** Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$, d'intégrale généralisée sur $I$ convergente.

Pour tous $a, b, c$ éléments ou extrémités de $I$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec convergence des intégrales impliquées.

**Proposition.** Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Pour $x < b$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on l'appelle **reste** de l'intégrale convergente, et :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \underset{<}{\to} b]{} 0$$

## 2.5 Techniques de calcul d'une intégrale généralisée

### 2.5.1 Calcul par primitivation de l'intégrande

Ce premier théorème est une conséquence directe de la définition.
Il s'applique lorsque l'on sait exprimer une primitive de l'intégrande.

**Théorème.**

Soit $f$ continue par morceaux sur $]a, b[$, dont on connaît une primitive $F$.
L'intégrale $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $F$ admet une limite finie $\ell_a$ en $a$ à droite et une limite finie $\ell_b$ en $b$ à gauche.
Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_{t \overset{>}{\to} a}^{t \overset{<}{\to} b} = \ell_b - \ell_a$$

**Remarque.** *La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par l'existence de limites finies du « crochet ».*

**Exemple.** Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 3t + 2}$.

### 2.5.2 Changement de variable

Le théorème du changement de variable est une technique efficace, et la formule doit pouvoir être utilisée « dans les deux sens ». L'entrainement permet d'avoir l'initiative de certains changements de variable classiques.

Le théorème est présenté pour le cas d'un intervalle ouvert, pour l'étude de $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$, mais se transpose aux cas d'un intervalle semi-ouvert, et bien-sûr au cas d'un segment.

**Théorème.**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$. Si $\varphi\,:\,]\alpha,\beta[\,\to\,]a,b[$ est :

- une bijection
- strictement croissante
- de classe $\mathcal{C}^1$

alors

- les deux intégrales $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\to\alpha}^{\to\beta}(f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature ;
- elles sont égales en cas de convergence.

**Remarque.** *La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par le changement de variable et la convergence de la nouvelle intégrale.*

**Remarque.** *Dans la pratique, on dit que l'on effectue le changement de variable $t=\varphi(u)$ et l'on écrit :*

$$\begin{array}{rcl} t & \textit{devient} & \varphi(u) \\ \mathrm{d}t & \textit{devient} & \varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ t \text{ de } a \text{ à } b & \textit{devient} & u \text{ de } \alpha \text{ à } \beta \end{array}$$

**Remarque.** *On peut adapter ce résultat au cas où $\varphi$ est strictement décroissante.*

$$\begin{array}{rcl} t & \textit{devient} & \varphi(u) \\ \mathrm{d}t & \textit{devient} & \varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ t \text{ de } a \text{ à } b & \textit{devient} & u \text{ de } \beta \text{ à } \alpha \end{array}$$

**Exemple.** Convergence et calcul de ($\alpha>0$) :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^4}{x^{10}+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$
3. $\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$
4. $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

**Remarque.** *Il convient de savoir justifier un changement de variable par une utilisation précise du théorème précédent. Néanmoins, lorsqu'il s'agit d'un simple calcul, ou pour des changements de variable très simples, notamment affines, on ne précise pas les hypothèses de régularité.*

### 2.5.3 Intégration par parties

Terminons par une formule elle aussi importante, qu'il faut appliquer avec précaution pour les intégrales généralisées. Elle est en particulier utile pour établir une relation de récurrence satisfaite par une intégrale dépendant de $n$.

**Théorème.**

Si :

- $f$ et $g$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$
- $f(t)g(t)$ admet des limites finies en $a$ à droite et en $b$ à gauche

Alors :

- les intégrales de $fg'$ et $f'g$ sont de même nature
- en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t=\Big[f(t)g(t)\Big]_{t\overset{>}{\to}a}^{t\overset{<}{\to}b}-\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

**Remarque.** *Il convient de savoir justifier une intégration par parties par une utilisation précise du théorème précédent. Néanmoins, lorsqu'il s'agit d'un simple calcul, on ne vérifie pas les hypothèses de régularité. Dans la pratique, on écrit :*

$$\int_a^b \overset{\nearrow}{u(t)}\underset{\searrow}{v(t)}\,\mathrm{d}t = [U(t)v(t)]_a^b - \int_a^b U(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

*en s'assurant que le « crochet » a des limites finies. La flèche montante symbolise la primitivation, et la flèche descendante la dérivation. $U$ désigne une primitive de $u$.*
*La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par les limites finies du « crochet » et la convergence de la nouvelle intégrale.*

**Exemple.** Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

# 3 Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

**Remarque.** *Sauf mention contraire, $I$ désigne un intervalle, et $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$.*

## 3.1 Convergence absolue d'une intégrale généralisée

**Définition.** On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

**Remarque.** *L'intérêt de cette notion est de remplacer, lors de l'étude de la convergence d'une intégrale généralisée, l'intégrande par une fonction positive, ce qui donne accès aux théorèmes de convergence par comparaison, par équivalent, par comparaison asymptotique, et qui sont étudiés dans cette section.*

**Théorème.**

Soit $f$ continue par morceaux sur $I$.
Si :

- $\displaystyle\int_I f$ converge absolument *i.e.* $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

Alors :

- $\displaystyle\int_I f$ converge
- $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

**Remarque.**

- *Il s'agit bien d'une condition suffisante, mais non nécessaire.*
  *La convergence, et la non convergence absolue de $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ fournit un contre-exemple classique qu'il convient d'avoir à l'esprit.*
- *Pour une fonction positive, convergence et convergence absolue de l'intégrale sont des notions équivalentes.*

## 3.2 Intégrabilité d'une fonction

**Définition.** On dit que $f$ est **intégrable sur** $I$ lorsque $f$ est continue par morceaux sur $I$ et l'intégrale de $f$ sur $I$ est absolument convergente.

**Remarque.** *Lorsque l'on dit* intégrable sur $I$*, on parle donc d'une fonction, de l'intégrande d'une intégrale absolument convergente.*
*Lorsque l'on dit* absolument convergente*, on parle d'une intégrale généralisée, dont l'intégrande est intégrable.*
*Pas de confusion :* intégrable *ne signifie pas que l'on peut simplement considérer l'intégrale de la fonction.*
*Pas de confusion :* intégrable *ne signifie pas* primitivable*.*

**Notation.** On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $I$.

**Proposition.**

- Sur un segment $[a, b]$, une fonction continue est intégrable.
- Sur un intervalle $]a, b[$ borné, une fonction continue qui se prolonge par continuité en $a$ et $b$ est intégrable.

**Remarque.** *Si $I = [a, b[$, on dit que l'on étudie l'intégrabilité de $f$ en $b$. L'intégrabilité de $f$ continue (par morceaux) sur $I = [a, b[$ ne dépend en effet que du comportement local de $f$ au voisinage de $b$.*

**Exemples de référence.**

- ln est intégrable en 0 ;
- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$ ;
- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$ ;
- $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$.
- $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable en $a$ si et seulement si $\alpha < 1$.

**Proposition.** La fonction $f$ est intégrable en $a$ (resp. en $b$) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0

## 3.3 Techniques d'étude

**Remarque.** *Dans la pratique, pour justifier qu'une intégrale généralisée converge, on étudie sa convergence absolue en utilisant l'un des théorèmes de ce paragraphe. On identifie la (ou les) bornes de l'intervalle où l'intégrale est généralisée en précisant la continuité (par morceaux) de l'intégrande, et on se place sur un voisinage de cette borne (on fait deux études distinctes si l'intégrale est doublement généralisée). L'idée est de comparer l'intégrande à une fonction de référence, la comparaison devant être « raisonnable » sur ce voisinage.*
*L'étude se fait donc sur l'intégrande, et non l'intégrale elle-même. C'est pour cette raison que les résultats sont énoncés en termes de fonctions intégrables.*

Commençons par énoncer le théorème dans le cas où $I = [a, +\infty[$. On considère $f$, $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$.

**Théorème.**

Si $|f| \leqslant |g|$ et $g$ intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $f$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.

**Théorème.**

Si $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et $g$ intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $f$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.

**Remarque.** *Ce résultat s'utilise en particulier lorsque $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}(g(x))$.*

**Théorème.**

Si $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$ et $g$ intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $f$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.

**Proposition.** Précisons aussi que, dans le cas où $f$ et $g$ sont telles que $0 \leqslant |f| \leqslant |g|$ et $f$ non intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $g$ n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

**Exemple.** Étudier l'intégrabilité sur un voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes :

$t \mapsto \dfrac{\cos t}{1+t^2}$ $\quad t \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ $\quad t \mapsto \dfrac{1}{t^2 \ln t}$

$t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^3}$ $\quad t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{1+t}$

Énonçons maintenant le théorème dans le cas où $I = ]0, b]$. On considère $f$, $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $]0, b]$.

**Théorème.**

Si $|f| \leqslant |g|$ et $g$ intégrable sur $]0, b]$, alors $f$ est intégrable sur $]0, b]$.

**Théorème.**

Si $f(x) \underset{x \to 0}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et $g$ intégrable sur $]0, b]$, alors $f$ est intégrable sur $]0, b]$.

**Théorème.**

Si $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} g(x)$ et $g$ intégrable sur $]0, b]$, alors $f$ est intégrable sur $]0, b]$.

**Exemple.** Étudier l'intégrabilité sur un voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t}$ $\quad t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t\sqrt{t}}$ $\quad t \mapsto \dfrac{1}{\sin t}$

**Remarque.** *Les théorèmes précédents s'adaptent à tous les cas d'intervalles semi-ouverts. On préfèrera cependant commencer par effectuer un changement de variable pour ramener le problème en 0 ou en $+\infty$, là où on sait comparer les fonctions entre elles.*

**Exemple.** Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}} \,\mathrm{d}t$.

**Méthode.** On peut aussi procéder, pour des exemples un peu plus délicats, par **éclatement** : pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée, on effectue un développement limité de son intégrande et on l'écrit comme somme de plusieurs termes, pour lesquels on étudie séparément la convergence de l'intégrale.

**Exemple.** Comment étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \,\mathrm{d}x$ ?

## 3.4 Cas des fonctions positives, continues et intégrables

**Théorème.**

Si $f$ est positive, continue et intégrable, et $\displaystyle\int_I f(t) \,\mathrm{d}t = 0$, alors $f$ est la fonction nulle sur $I$.

**Remarque.**

- *L'hypothèse de continuité est importante ici.*
- *Ce théorème est souvent utilisé pour montrer le caractère « défini-positif » d'un produit scalaire défini par une intégrale.*
- *On fera référence à ce théorème en parlant de « fonction continue, positive, d'intégrale nulle ».*

# 4 Intégration des relations de comparaison

## 4.1 Intégrale généralisée en $+\infty$

### 4.1.1 Cas d'intégrabilité, résultat sur les restes

**Théorème.**

Soit $f$ une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, $g$ une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a,+\infty[$.

- Si $f(x) = \underset{x\to+\infty}{O}(g(x))$ et $g$ intégrable en $+\infty$, alors $f$ est intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les restes :
$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
- Si $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(g(x))$ et $g$ intégrable en $+\infty$, alors $f$ est intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les restes :
$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
- Si $f$ est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ et $g$ intégrable en $+\infty$, alors $f$ est intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les restes :
$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$

**Remarque.** *Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont petites, qui tendent vers* $0$.

### 4.1.2 Cas de non intégrabilité, résultat sur les intégrales partielles

**Théorème.**

Soit $f$ une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, $g$ une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a,+\infty[$.

- Si $f(x) = \underset{x\to+\infty}{O}(g(x))$ et $g$ non intégrable en $+\infty$, alors on peut comparer les intégrales partielles :
$$\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\int_a^{x} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
- Si $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(g(x))$ et $g$ non intégrable en $+\infty$, alors on peut comparer les intégrales partielles :
$$\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_a^{x} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
- Si $f$ est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ et $g$ non intégrable en $+\infty$, alors $f$ n'est pas intégrable en $+\infty$ et on peut comparer les intégrales partielles :
$$\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_a^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

**Remarque.** *Il s'agit ici de comparaison de quantité qui sont grandes, qui tendent vers* $+\infty$.

**Remarque.** *Dans les deux premiers points, on n'a pas d'information sur la convergence ou la divergence de* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$*, mais le résultat n'a pas d'intérêt lorsque* $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

## 4.2 Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Le résultat précédent s'adapte pour une intégrale généralisée à gauche en $b \in ]-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ou généralisée en à droite en $a \in [-\infty, +\infty[ = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

### 4.2.1 Cas d'intégrabilité, résultat sur les restes

**Théorème.**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $f$ une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a, b[$, $g$ une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a, b[$.

- Si $f(x) = \underset{x \to b}{O}(g(x))$ et $g$ intégrable en $b$, alors $f$ est intégrable en $b$ et on peut comparer les restes :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to b}{O}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si $f(x) = \underset{x \to b}{o}(g(x))$ et $g$ intégrable en $b$, alors $f$ est intégrable en $b$ et on peut comparer les restes :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to b}{o}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si $f$ est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$ et $g$ intégrable en $b$, alors $f$ est intégrable en $b$ et on peut comparer les restes :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to b}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

**Théorème.**

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $f$ une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $]a, b]$, $g$ une fonction réelle positive continue par morceaux sur $]a, b]$.

- Si $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$ et $g$ intégrable en $a$, alors $f$ est intégrable en $a$ et on peut comparer les restes :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to a}{O}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$ et $g$ intégrable en $a$, alors $f$ est intégrable en $a$ et on peut comparer les restes :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to a}{o}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si $f$ est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et $g$ intégrable en $a$, alors $f$ est intégrable en $a$ et on peut comparer les restes :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to a}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

### 4.2.2 Cas de non intégrabilité, résultat sur les intégrales partielles

**Théorème.**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $f$ une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $[a, b[$, $g$ une fonction réelle positive continue par morceaux sur $[a, b[$.

- Si $f(x) = \underset{x \to b}{O}(g(x))$ et $g$ non intégrable en $b$, alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to b}{O}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si $f(x) = \underset{x \to b}{o}(g(x))$ et $g$ non intégrable en $b$, alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to b}{o}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si $f$ est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$ et $g$ non intégrable en $b$, alors $f$ n'est pas intégrable en $b$ et on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

**Théorème.**

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $f$ une fonction réelle ou complexe continue par morceaux sur $]a, b]$, $g$ une fonction réelle positive continue par morceaux sur $]a, b]$.

- Si $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$ et $g$ non intégrable en $a$, alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to a}{O}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$ et $g$ non intégrable en $a$, alors on peut comparer les intégrales partielles :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x \to a}{o}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si $f$ est aussi à valeurs réelles positives, que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et $g$ non intégrable en $a$, alors $f$ n'est pas intégrable en $b$ et on peut comparer les intégrales partielles :

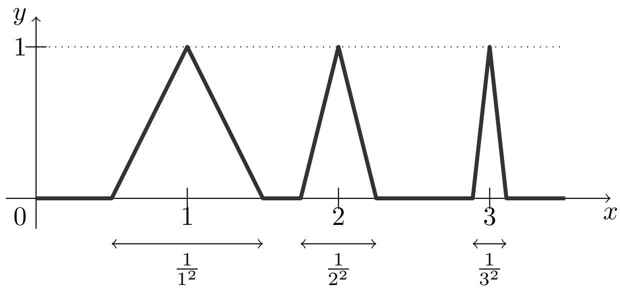
$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to a}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

# 5 Annexes

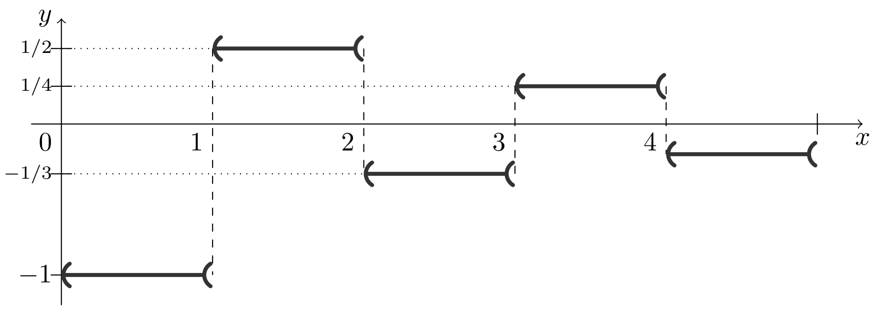
## 5.1 Annexe : une analogie trop séduisante avec les séries

Réfléchissons à la différence entre convergence et convergence absolue d'une intégrale généralisée, ainsi qu'à ces analogies avec les séries numériques, qui sont certes séduisantes, et auxquelles on pense tous. Voici deux exemples de fonctions définies par leur graphe :

1. Cette fonction est-elle intégrable ? A-t-elle une limite en $+\infty$ ?




2. Cette fonction est-elle intégrable ? Son intégrale sur $[0, +\infty[$ est-elle convergente ?




# Exercices et résultats classiques à connaître

## 5.2 Quatre exemples d'intégrales de Bertrand

**66.1**

Étudier la convergence de :

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$

**Remarque.** *On appelle **intégrale de Bertrand** une intégrale de la forme* $\displaystyle\int_{\dots}^{\dots} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}\,\mathrm{d}t$, *généralisée en 0 ou en $+\infty$. Son étude systématique n'est pas au programme.*

## 5.3 Trouver une relation de récurrence par intégration par parties

**66.2**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.
Trouver une relation entre $I_n$ et $I_{n+1}$ et en déduire $I_n$.

## 5.4 Étude de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

**66.3**

Démontrer la la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

## 5.5 Étude de convergence d'intégrale par une méthode d'éclatement

**66.4**

Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) \mathrm{d}x$.

## 5.6 Utiliser les complexes pour calculer une intégrale généralisée

**66.5**

Utiliser les complexes pour calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin t\,\mathrm{d}t$

## 5.7 Trouver un équivalent par intégration par parties

**66.6**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

(a) Montrer l'existence de $I_n$, pour tout $n$.

(b) Déterminer la limite de $(I_n)_n$.

(c) À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent simple de $I_n$.

# Exercices du CCINP

**66.7** CCINP 28

**N.B. : les deux questions sont indépendantes.**

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$ ?
2. Soit $a$ un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$ ?

**66.8** CCINP 29.12

On pose : $\forall\, x \in ]0,+\infty[$, $\forall\, t \in ]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ .

1. Démontrer que : $\forall\, x \in ]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors : $\forall\, x \in ]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t.$
2. Pour tout $x \in ]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

# Exercices

## Convergence d'intégrales généralisées, intégrabilité

**66.9**

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t+1}\,\mathrm{d}t$

**66.10**

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$

**66.11**

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$

**66.12**

Étudier, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+t^2\mathrm{e}^{-t}}$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t}\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right)\mathrm{d}t$

**66.13**

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t}{1+t^2}$

(b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t)^3}}$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\,\mathrm{Arctan}\,t}\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\ln t)^2}\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t+2-\sqrt{t^2+4t+1})\mathrm{d}t$

**66.14**

(a) Montrer que $x \mapsto x\ln x$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer son intégrale.

(b) Pour tout réel $\alpha$, soit $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^\alpha}$.

b1. Étudier l'intégrabilité de $f_\alpha$ sur $]0,+\infty[$, en fonction de $\alpha$.

b2. En effectuant le changement de variable $y = 1/x$, calculer $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$.

**66.15**

Étudier la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

*On peut démontrer que sa valeur est* $\sqrt{\pi}$.

**66.16**

Convergence de l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt[3]{t}+\cos t}\,\mathrm{d}t$

**66.17**

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

**66.18**

Étudier la convergence de l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)\ln(\tan t)\,\mathrm{d}t$$

## Calcul d'intégrales généralisées

**66.19**

Montrer que les intégrales suivantes sont bien définies et les calculer : ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$)

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_0^{1} \ln^n t\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{Arctan}\,t}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$ ($t = \frac{1}{u}$)

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin at\,\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}\,x}\,\mathrm{d}x$

**66.20**

Établir la convergence et calculer la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

**66.21**

Justifier et calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+\mathrm{i}t)}$$

**66.22**

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$.

**66.23**

Démontrer la convergence, et calculer la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \, dx$$

**66.24**

Établir la convergence et calculer la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \, dt$$

### Suite d'intégrales généralisées

**66.25**

(a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$I_n(f) = \int_0^1 x^n f(x) \, dx$$

Étudier la suite $(I_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Quelle est la limite de la suite $(nI_n(f))_n$ ? En déduire un équivalent de $I_n(f)$ si $f(1) \neq 0$.

(c) Soit $J_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+x))^n \, dx$. Déterminer un équivalent de $J_n$.

**66.26**

(a) Prouver la convergence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^2} \ln x \, dx$$

(b) Montrer que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

### Autres exercices

**66.27**

Étudier l'intégrabilité en 0 de :

$$f \,:\, x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t} \, dt$$

## Petits problèmes d'entrainement

**66.28** ✍

Soit $0 < a < b$ deux réels.

(a) Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, dx$.

(b) Démontrer que, pour tout réel $h > 0$ :

$$\int_h^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, dx = \int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}}{t} \, dt$$

(c) Montrer que la fonction $g \,:\, t \mapsto \dfrac{e^{-t} - 1}{t}$ possède un prolongement continu en 0. En déduire la valeur de $I$.

**66.29** ✍

On s'intéresse à :

$$I = \int_1^{+\infty} \operatorname{Arcsin} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \, dx$$

(a) Montrer la convergence de cette intégrale généralisée.

(b) Calculer $I$.
On pourra effectuer une intégration par parties et remarquer que $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ est la dérivée de $\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ sur $]1, +\infty[$.

**66.30**

Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ soit convergente.

(a) Si $f(x)$ admet une limite $\ell$ quand $x \to +\infty$, que vaut $\ell$ ?

(b) Donner un exemple où $f(x)$ n'a pas de limite lorsque $x \to +\infty$.

(c) Montrer que si $f$ est décroissante, alors $xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

**66.31**

Soit $f : t \mapsto \sin(t^2)$.

(a) En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{u}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

La fonction $f$ est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$ ?

(b) Reprendre l'exercice, en considérant la série de terme général :

$$u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)\mathrm{d}t$$

**66.32**

Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante.
On pose $g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$g(x) = f(x)\sin x$$

Montrer que les intégrabilités sur $[0, +\infty[$ de $f$ et de $g$ sont équivalentes.

**66.33**

(a) Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + \tan x)$. Montrer que son graphe possède un centre de symétrie.

(b) Montrer la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

**66.34**

Pour tout $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

(a) Justifier l'existence de $I_1$.
On admet pour l'instant que $I_1 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

(b) Existence et calcul, par récurrence, de $I_n$ pour $n \geqslant 2$.

(c) Montrer l'existence de deux constantes $a$ et $b$ telles que $\ln(I_n) = a\ln n + b + o(1)$.

(d) Étudier la nature des séries $\sum I_n$ et $\sum (-1)^n I_n$.

(e) Démontrer la valeur admise de $I_1$.