Résolution pratique des équations différentielles linéaires

Cours 2

Exercices 12

Sauf mention contraire, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie.

1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

1.1 Position du problème, structure des solutions

Définition. Une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** 1 est une équation de la forme :

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{E}$$

et l'équation homogène associée est :

$$y' + a(x)y = 0 \tag{H}$$

où a et b sont des applications continues sur I intervalle.

Remarque. *L'équation peut être proposée sous la forme :*

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$$

Il importe dans ce cas de travailler sur un ***intervalle*** *sur lequel α* ***ne s'annule pas*** *: l'équation doit être* ***normalisable*** *sur I.*

Structure des solutions. Si a et b sont continues et I est un intervalle, alors

- $\mathcal{S}_H$ est une droite vectorielle
- $\mathcal{S}_E$ est une droite affine dirigée par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S}_E = y_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

1.2 Résolution : première méthode

Méthode.

1. On qualifie l'équation différentielle, en précisant la continuité des coefficients, le fait qu'on travaille sur un intervalle et on écrit l'équation sous forme normalisée.
2. On trouve une solution particulière notée y_{part} de (E), par exemple en la cherchant sous une forme particulière.
3. On utilise le résultat exprimant $\mathcal{S}_H$: notant A une primitive de a sur I, $\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{-A(x)})$.
4. On conclut :
$$\mathcal{S}_E = y_{part} + \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{-A(x)})$$

Remarque. *La méthode de variation de la constante, vue en première année, permet de déterminer une solution particulière lorsque l'on a déterminé $\mathcal{S}_H$. Voir aussi la section suivante.*

Exemple. Résoudre l'équation :

$$x' + x = t^2$$

Exemple. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation :

$$xy' - y = x^3$$

1.3 Résolution : seconde méthode

Méthode.

1. Au brouillon, on calcule A une primitive de a sur I.
2. On effectue le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = z(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$$

en raisonnant bien par équivalence.

Exemple. Résoudre l'équation :

$$(1+x^2)y' - 2xy = 1 + x^2$$

1.4 Résolution sur un intervalle sur lequel l'équation n'est pas normalisable

Méthode. Si l'équation n'est pas normalisable sur l'intervalle I de résolution, on partage I en sous-intervalles sur lesquels l'équation est normalisable. On résout sur chacun de ces intervalles, puis on effectue un **recollement** des solutions.

Exemple. Représenter quelques courbes intégrales et déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles :

$$xy' - y = 0 \qquad xy' - 2y = 0 \qquad xy' - \frac{1}{2}y = 0$$

2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

2.1 Position du problème, structure des solutions

Définition. Une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** 2 est une équation de la forme :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \tag{E}$$

et l'équation homogène associée est :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{H}$$

où a, b et c sont des applications continues sur I intervalle.

Remarque. *L'équation peut être proposée sous la forme :*

$$\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t)$$

Il importe dans ce cas de travailler sur un ***intervalle*** *sur lequel α* ***ne s'annule pas*** *: l'équation doit être* ***normalisable*** *sur I.*

Remarque. *Contrairement aux équations d'ordre 1 ou aux équations d'ordre 2 à coefficients constants, il n'y a pas de formule de résolution. Il n'est donc pas utile d'avoir une équation normalisée, mais il est important qu'elle soit normalisable : α ne doit pas s'annuler sur I.*

Remarque. *On présente au § 4.3 une méthode de résolution lorsqu'une solution de (H) est connue.*

Structure des solutions. Si α, β et γ continues, I est un intervalle et α ne s'annule pas sur I, alors

- $\mathcal{S}_H$ est un plan vectoriel
- $\mathcal{S}_E$ est un plan affine dirigé par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S}_E = x_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

Définition. Un problèmde de Cauchy donné par :

$$\begin{cases} \alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t) \\ x(t_0) = x_0 x'(t_0) = x'_0 \end{cases}$$

où α, β, γ et δ sont continues sur I intervalle, α ne s'annule pas sur I, $t_0 \in I$.
Il admet une et une seule solution.

Remarque. *Avec la seule condition $x(t_0) = x_0$, ou avec des conditions aux limites comme* $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$ *, on ne peut garantir l'existence et l'unicité.*

2.2 Étude de l'équation homogène — Wronskien

Étude. On suppose que a, b et c sont des applications continues sur I intervalle, et on note

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{H}$$

l'équation différentielle linéaire homogène scalaire étudiée. On a

$$\begin{aligned} (H) &\iff \begin{cases} x' &= x' \\ x'' &= -a(t)x' - b(t)x \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -b(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \\ &\iff X' = A(t)X \quad \text{système différentiel noté } H_{\text{mat}} \end{aligned}$$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ et $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -b(t) \end{pmatrix}$.
Un couple (ϕ, ψ) est un système fondamental de solutions de (H), i.e. une base de $\mathcal{S}_H$, si et seulemement si :

$$\left(\begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix} \right) \text{ est un système fondamental de solutions de } H_{\text{mat}}$$

Définition. Si ϕ et ψ sont deux solutions de (H) sur I, on définit leur **wronskien** en posant :

$$W \,:\, t \mapsto \begin{vmatrix} \phi(t) & \psi(t) \\ \phi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \phi(t)\psi'(t) - \psi(t)\phi'(t)$$

Théorème.

Soit ϕ et ψ sont deux solutions de (H) sur I et W le wronskien de ϕ et ψ. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) (ϕ, ψ) est une base de $\mathcal{S}_H$

(ii) $\forall t \in I$, $W(t) \neq 0$

(iii) $\exists t \in I$, $W(t) \neq 0$

2.3 Méthode de variation des constantes

Méthode de variation des constantes. On suppose connu un système fondamental (ϕ, ψ) de solutions de (H).
Il reste donc à déterminer une solution particulière de (E). Appliquer la méthode de variation des constantes, c'est rechercher une solution particulière de (E) sous la forme :

$$x(t) = \lambda(t)\phi(t) + \mu(t)\phi(t)$$

avec la condition additionnelle :

$$\lambda'(t)\phi(t) + \mu'(t)\phi(t) \forall t \in I$$

Remarque.

- $\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}(\phi, \psi) = \{t \mapsto \lambda\phi(t) + \mu\psi(t),\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$. *Ici, on fait varier les constantes »* λ *et* μ.
- *On peut se souvenir de la condition additionnelle en disant que n'apparaissent pas de dérivées secondes des « constantes »* λ *et* μ.

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+t^2}$$

2.4 Recherche de solutions développables en séries entières

Méthode. On a vu, lors de l'étude des séries entières, comment rechercher des solutions développables en séries entières d'une équation différentielle linéaire, par exemple d'ordre 1 ou 2.

On note $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, on suppose le rayon de convergence > 0 (c'est l'analyse). Dire que x est solution de l'équation différentielle se traduit (si tout va bien) en une condition sur les a_n (ici, on raisonne par équivalence sous l'hypothèse $R > 0$). On vérifie que les séries obtenues ont bien un rayon de convergence > 0 (c'est la synthèse).

Exemple. Utiliser une série entière pour déterminer l'unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exemple. On considère l'équation différentielle :

$$t^2 x'' - 4tx' + (t^2 - 6)x = 0 \tag{E}$$

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle qui sont somme d'une série entière autour de 0.
2. Déterminer la dimension de l'espace des fonctions qui sont solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$.

3 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

3.1 Position du problème

Définition.

- On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants** :

$$X' = AX + B(t) \tag{S}$$

  où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est continue.

- Résoudre (S), c'est déterminer les fonctions $X : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall t \in I,\ X'(t) = AX(t) + B(t)$$

- On appelle **système différentiel homogène associé à** (S) :

$$X' = A(t)X \tag{H}$$

Remarque. *Un système différentiel linéaire à coefficients constant s'écrit aussi :*

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}a_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}a_n + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}a_n + b_n(t) \end{cases}$$

où les a_{ij} sont des scalaires (constantes) et les b_i des fonctions continues sur I intervalle.

Proposition.

- L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension n.
- L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) est un espace affine de dimension n, dirigé par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S}_E = X_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

Écriture vectorielle. Un sysème différentiel linéaire à coefficients constant peut être vu comme la traduction matricielle d'une équation différentielle linéaire :

$$x' = a \cdot x + b(t) \tag{E}$$

où $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b \,:\, I \to E$ est continues, et où on note $a \cdot x$ l'image $a(x)$ du vecteur x par l'endomorphisme a.

Remarque. *On pourrait présenter les résultats de ce paragraphe sous forme vectorielle.*

3.2 Résolution théorique à l'aide de l'exponentielle de matrice

Rappel sur l'exponentielle de matrice. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit :

$$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

- $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée est $t \mapsto A\exp(tA) = \exp(tA)A$.
- $\exp(A)$ est inversible, et $\big(\exp(A)\big)^{-1} = \exp(-A)$.
- Si A et B sont deux matrices qui commutent :

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$$

Résultat : solutions du système différentiel homogène.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les solutions du système différentiel homogène :

$$X' = AX$$

sont les applications :

$$t \mapsto \exp(tA)C$$

où $C \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

Remarque. *Dans l'écriture précédente, $\exp(tA)$ désigne une matrice carrée, C une matrice colonne. On peut rapprocher l'expression des solutions de :*

$$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{ta},\ \lambda \in \mathbb{K}$$

qui est l'expression des solutions de l'équation scalaire $y' = ay$, mais la généralisation doit se faire correctement.

Résultat : obtention d'une solution particulière par variation de la constante.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B\ :\ I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ continue. Pour résoudre le système différentiel à coefficients constants :

$$X' = AX + B(t) \tag{E}$$

on a intérêt à effectuer le changement de fonction inconnue :

$$X(t) = \exp(tA)C(t)$$

où $C\ :\ I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est $\mathcal{C}^1$.

Preuve. En effet, $X'(t) = A\exp(tA)C(t) + \exp(tA)C'(t)$ et donc :

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (E) & \ \forall t \in I,\ X'(t) = A\,X(t) + B(t) \\ & \ \forall t \in I,\ \exp(tA)\,C'(t) = B(t) \\ & \ \forall t \in I,\ C'(t) = \exp(-tA)\,B(t) \end{aligned}$$

Notant F une primitive sur I de $t \mapsto \exp(-tA)B(t)$, on peut dire que $t \mapsto \exp(tA)F(t)$ est une solution particulière de (E). □

3.3 Problème de Cauchy

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B\ :\ I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ continue. Soit $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. On appelle **problème de Cauchy** le problème :

$$\begin{cases} X' = AX + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Théorème de Cauchy linéaire.

> Le problème de Cauchy admet une et une seule solution définie sur I.

Preuve.

$$\begin{aligned} X \text{ est solution} &\iff \begin{cases} \forall t \in I,\ X'(t) = AX(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall t \in I,\ \exp(-tA)X'(t) - \exp(-tA)AX(t) = \exp(-tA)B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall t \in I,\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\exp(-tA) \\ X(t)\Big) = \exp(-tA)B(t)X(t_0) = X_0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall t \in I,\ \exp(-tA)X(t) = \exp(-t_0A)X(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \exp(-uA)B(u)\,\mathrm{d}u \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \\ &\iff \forall t \in I,\ X(t) = \exp\big((t-t_0)A\big)X_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\big((t-u)A\big)B(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

□

3.4 Résolution effective dans le cas de diagonalisabilité

On suppose dans ce paragraphe que A est diagonalisable :

$$A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } P = \big(V_1|\ldots|V_n\big)$$

Les λ_i sont les valeurs propres de A, et les V_i forment une base de vecteurs propres associés.

Méthode : résolution du système différentiel homogène (H).

$$\begin{aligned}
X \text{ solution de } (H) &\iff \forall t \in I,\ X'(t) = AX(t)\\
&\iff \forall t \in I,\ X'(t) = PDP^{-1}X(t)\\
&\iff \forall t \in I,\ Y'(t) = DY(t) \qquad \text{où, pour tout } t,\ X(t) = PY(t)\\
&\iff \forall t \in I,\ \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t)\\ \vdots\\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t)\end{cases}\\
&\iff \exists c_1,\dots,c_n \in \mathbb{K},\ \forall t \in I,\ \begin{cases} y_1(t) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\\ \vdots\\ y_n(t) = c_n\mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{cases}\\
&\iff \exists c_1,\dots,c_n \in \mathbb{K},\ \forall t \in I,\ Y(t) = \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\\ \vdots\\ c_n\mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{pmatrix}\\
&\iff \exists c_1,\dots,c_n \in \mathbb{K},\ \forall t \in I,\ X(t) = \big(V_1|\dots|V_n\big)\begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\\ \vdots\\ c_n\mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{pmatrix}\\
&\iff X \in \mathrm{Vect}\Big(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t}V_i\Big)1 \leqslant i \leqslant n
\end{aligned}$$

On a déterminé un système fondamental de solutions de (H).

Méthode : recherche d'une solutions particulière.

Par variation de la constante, on cherche une solution sous la forme :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\mathrm{e}^{\lambda_i t}V_i$$

où les c_i sont des fonctions inconnues supposées de classe $\mathcal{C}^1$. On calcule :

$$\begin{aligned}
X'(t) &= \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\mathrm{e}^{\lambda_i t}V_i + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\lambda_i\mathrm{e}^{\lambda_i t}V_i\\
\text{et } AX(t) &= A\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\mathrm{e}^{\lambda_i t}V_i\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\mathrm{e}^{\lambda_i t}AV_i\\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\mathrm{e}^{\lambda_i t}\lambda_i V_i \text{ car } V_i \text{ vecteur propre associé à la v.p. } \lambda_i
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
X \text{ solution } &\iff \forall t \in I,\ X'(t) = AX(t) + B(t)\\
&\iff \forall t \in I,\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\mathrm{e}^{\lambda_i t}V_i = B(t)\\
&\iff \forall t \in I,\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\mathrm{e}^{\lambda_i t}V_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t)V_i\\
&\qquad \text{où } (\beta_1(t),\dots,\beta_n(t)) \text{ sont les coordonnées de } B(t) \text{ dans } (V_1,\dots,V_n)\\
&\iff \forall i,\ \forall t \in I,\ c_i'(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_i t}\beta_i(t)
\end{aligned}$$

ce qui définit les $c_i(t)$, à une constante additive près.

3.5 Exemples de résolution effective en dimension 2

Exemple. Résoudre le système différentiel $X' = AX$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -29 & -50 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$$

Exemple. Résoudre :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + t \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$$

4 Annexes

4.1 Rappel : Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants

Étude. Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, avec $a \neq 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. On s'intéresse à :

$$ay'' + by' + cy = f(t) \qquad (E)$$

qui est une **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants**. L'équation homogène associée s'écrit, sous forme matricielle :

$$X' = AX \qquad (H_{\text{mat}})$$

où $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(X) = \frac{1}{a}(aX^2 + bX + c)$$

Définition. On appelle **équation caractéristique** de (H) l'équation :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Théorème.

On conserve les notations précédentes.

- Si le polynôme caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\mathcal{S}_H = \operatorname{Vect}\left(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t}\right)$$

- Si le polynôme caractéristique a une racine double r_0, alors :

$$\mathcal{S}_H = \operatorname{Vect}\left(t \mapsto e^{r_0 t}, t \mapsto t\, e^{r_0 t}\right)$$

Remarque. *Dans le cas particulier, mais fréquent en physique, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et où l'équation caractéristique admet deux racines distinctes complexes conjuguées $r \pm i\omega$, on a :*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \operatorname{Vect}\left(t \mapsto e^{rt}\cos(\omega t), t \mapsto e^{rt}\sin(\omega t)\right) \\ &= \left\{t \mapsto Ae^{rt}\cos(\omega t + \varphi),\ A, \varphi \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Méthode. On recherche une solution particulière de l'équation :

$$ay'' + by' + cy = Ae^{\lambda t}$$

avec a, b, c, λ, A des scalaires.

- Si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto Be^{\lambda t}$$

- Si λ est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto Bte^{\lambda t}$$

- Si λ est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto Bt^2e^{\lambda t}$$

Méthode. On recherche une solution particulière de l'équation :

$$ay'' + by' + cy = A\cos(\omega t) \qquad (\text{resp. } A\sin(\omega t)\ )$$

avec a, b, c des coefficients réels et $\omega \neq 0$.

- Si $i\omega$ (et donc $-i\omega$) n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$$

- Si $i\omega$ (et donc $-i\omega$) est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto \lambda t\cos(\omega t) + \mu t\sin(\omega t)$$

4.2 Complément : utilisation du wronskien pour les EDL scalaires d'ordre 2

Résultat. Dans le contexte des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \qquad (H)$$

Si l'on connaît ϕ une solution particulière de l'équation homogène (H), on peut utiliser le wronskien pour déterminer une deuxième solution de (H), indépendante de ϕ.

Preuve. Analyse

Si ψ est une autre solution de (H), et W le wronskien de (ϕ, ψ), on a, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} W(t) &= \phi(t)\psi'(t) - \phi'(t)\psi(t) \\ \text{et } W'(t) &= \phi(t)\psi'(t) - \phi''(t)\psi(t) \\ &= \phi(t)\big(-a(t)\psi'(t) - b(t)\psi(t)\big) \\ &\quad - \psi(t)\big(-a(t)\phi'(t) - b(t)\phi(t)\big) \\ &\quad \text{car } \phi, \psi \in \mathcal{S}_H \\ &= -a(t)W(t) \end{aligned}$$

donc W est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$y' + a(t)y = 0$$

En notant $A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$ une primitive sur I de $a(t)$, il existe donc $K \in \mathbb{K}$ tel que :

$$W(t) = K\mathrm{e}^{-A(t)}$$

Synthèse

On résout l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\phi(t)y' - \phi'(t)y = \mathrm{e}^{-A(t)}$$

où l'on a choisit arbirtrairement $K = 1$. Cela nous fournit une solution de (H) : l'observation du calcul ci-avant montre que W est solution de $y' + a(t)y = 0$ si et seulement si ψ est solution de (H). □

4.3 Complément : méthode de Lagrange pour les EDL scalaires d'ordre 2

Méthode. Dans le contexte des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 :

$$\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t) \qquad (E)$$

Si l'on connaît y_0 une solution particulière de l'équation homogène (H), on a intérêt à effectuer le changement de fonction inconnue :

$$y(t) = z(t)y_0(t)$$

Explication. On mène les calculs suivants :

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t)y_0(t) \\ y'(t) &= z'(t)y_0(t) + z(t)y_0'(t) \\ y''(t) &= z''(t)y_0(t) + 2z'(t)y_0'(t) + z(t)y_0''(t) \end{aligned}$$

Pour traduire que y est solution de (E), on fait une combinaision linéaire de ces trois égalités. Comme y_0 est solution de (H), les termes en $z(t)$ se simplifient toujours. On regroupe les termes en $z''(t)$ et ceux en $z'(t)$:

$$\begin{aligned} y \text{ solution } \iff \forall t \in I,\ &\alpha(t)y_0(t)z''(t) \\ &+ \big(2\alpha(t)y_0'(t) + \beta y_0(t)\big)z'(t) = \gamma(t) \end{aligned}$$

Il s'agit d'une EDL1 en y_0', pour laquelle on a donc des formules de résolution. □

Exemple. On veut résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation :

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - v^2)x = 0$$

où v est un réel positif.

1. Montrer qu'il existe une unique solution de la forme :
$$J_v = t^v \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \qquad (E)$$
où $a_0 = 1$. Sur quel intervalle cette solution est-elle définie ?

2. Dans le cas où $v = \dfrac{1}{2}$, exprimer toutes les solutions de (E) à l'aide des fonctions usuelles.

4.4 Complément : résolution des EDL scalaires homogènes d'ordre n

Proposition. On considère (H) une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants :

$$y^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} \qquad (H)$$

de fonction inconnue y nécessairement $\mathcal{C}^\infty$ sur I intervalle de $\mathbb{R}$.
On note $D : f \mapsto f'$ endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$, et $P = X^n - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$.
L'équation (H) s'écrit alors :

$$P(D)(y) = 0 \qquad (H)$$

et donc $\mathcal{S}_H = \operatorname{Ker} P(D)$.
Si $P = (X - r_1)^{m_1} \dots (X - r_p)^{m_p}$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors :

$$\mathcal{S}_H = \Big\{ t \mapsto P_1(t)\mathrm{e}^{r_1 t} + \dots + P_p(t)\mathrm{e}^{r_p t}, \quad \forall i,\ P_i \in \mathbb{K}_{m_i - 1}[X] \Big\}$$

Preuve. Par le lemme de décomposition des noyaux :

$$\operatorname{Ker} P(D) = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(D - r_i \mathrm{Id})^{m_i}$$

On va donc montrer que, pour $r \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\operatorname{Ker}(D - r\mathrm{Id})^m = \Big\{ t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{rt},\ P \in \mathbb{K}_{m-1}[X] \Big\}$$

Raisonnons par récurrence sur m.

- Si $m = 1$, $\operatorname{Ker}(D - r\mathrm{Id})$ est l'ensemble des solutions de l'équation $y' - ry = 0$. On sait que c'est $\{t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{rt},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :
  $\operatorname{Ker}(D - r\operatorname{Id})^m = \{t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{rt},\ P \in \mathbb{K}_{m-1}[X]\}$
  On a alors :
  $$\begin{aligned} &y \in \operatorname{Ker}(D - r\operatorname{Id})^{m+1} \\ &\iff y' - ry \in \operatorname{Ker}(D - r\operatorname{Id})^m \\ &\iff \exists P \in \mathbb{K}_{m-1}[X],\ y' - ry = P(t)\mathrm{e}^{rt} \end{aligned}$$
  Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On effectue le changement de fonction inconnue
  $$y(t) = z(t)\mathrm{e}^{rt},\ y'(t) = z'(t)\mathrm{e}^{rt} + rz(t)\mathrm{e}^{rt}$$
  Alors :
  $$\begin{aligned} &y \in \operatorname{Ker}(D - r\operatorname{Id})^{m+1} \\ &\iff \exists P \in \mathbb{K}_{m-1}[X],\ z' = P(t) \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{K}_{m}[X],\ z = Q(t) \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{K}_{m}[X],\ y = Q(t)\mathrm{e}^{rt} \end{aligned}$$
  donc $ker(D - r\operatorname{Id})^{m+1} = \{t \mapsto Q(t)\mathrm{e}^{rt},\ Q \in \mathbb{K}_m[X]\}$

On a établi le résultat annoncé. □

Exercices et résultats classiques à connaître

Utilisation des séries entières

671.1

On considère sur $]0,1[$ l'équation :
$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$$

(a) Déterminer une solution non nulle, développable en série entière, notée y_0.

(b) Résoudre l'équation en effectuant le changement de fonction inconnue :
$$y(x) = z(x)y_0(x)$$

Résolution par changement de fonction inconnue

671.2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :
$$(1+\mathrm{e}^x)y'' + 2\mathrm{e}^x y' + (2\mathrm{e}^x + 1)y = \mathrm{e}^x$$
en effectuant le changement de fonction inconnue :
$$z(x) = (1+\mathrm{e}^x)y(x)$$

Un changement de variable, c'est un changement de fonction inconnue

671.3

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation :
$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$
en effectuant le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$.

Exercices du CCINP

671.4 — 31

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

671.5 — 32

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

671.6 — 42

On considère les deux équations différentielles suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Exercices

671.7

Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + \frac{2x}{1+x^2} y = 1$$

671.8

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

(b) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(c) $y'' - 2y' + 5y = 0$

(d) $y'' + y = 0$

671.9

Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle :

(a) $y'' + 2y' + 2y = \sin x$

(b) $y'' + y = 2\cos^2 x$

671.10

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(t-1)y'' - ty' + y = 0$$

On pourra intuiter deux solutions particulières, polynomiale et exponentielle.

671.11

On s'intéresse à l'équation :

$$t^2 y'' + ty' - y = 0 \qquad (E)$$

(a) Rechercher des solutions particulières de la forme $y(t) = t^\alpha$.

(b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

671.12

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(t^2 + 2t + 2)y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$$

en recherchant des solutions polynomiales.

Petits problèmes d'entrainement

671.13

Soit f continue et bornée sur $]0,+\infty[$. On considère l'équation différentielle :

$$xy' - y + f(x) = 0$$

Montrer qu'elle admet une unique solution y_0 telle que y_0' ait une limite nulle en $+\infty$.

671.14

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation :

$$t\ln(t)y' + y = 0$$

671.15

(a) Déterminer une solution particulière, puis résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation :

$$2x^2y' + xy = 1$$

(b) Utiliser la méthode de variation de la constante pour résoudre :

$$xy' - y = x\ln x$$

(c) Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de :

$$xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$$

671.16

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = \frac{1}{n^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

(b) Démontrer la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

(c) Déterminer les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ solutions de :

$$y'' + 2y' + y = g(x)$$

671.17

Déterminer les solutions complexes de l'équation différentielle :

$$y'' - (1+3\mathrm{i})y' - 4y = 0$$

671.18

(a) Résoudre :

$$x'' + 2x' + x = \mathrm{e}^{-t}$$

(b) Résoudre :

$$x'' + x' + x = t^2 + \mathrm{e}^t$$

(c) Utiliser le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$ pour résoudre sur $]0,+\infty[$:

$$t^2y'' + 4ty' + 2y = 1$$

671.19

Déterminer les solutions développables en série entière de :

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$$

671.20

Résoudre sur des intervalles à préciser, par la méthode de variation des constantes, l'équation :

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

671.21

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation :

$$x^2y'' + xy' - \Big(x^2 + \frac{1}{4}\Big)y = 0$$

en effectuant le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = x^\alpha z(x)$$

où α est choisi judicieusement.

671.22

On considère sur $]0,1[$ l'équation :

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$$

(a) Déterminer une solution non nulle, développable en série entière, notée y_0.

(b) Résoudre l'équation en effectuant le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = z(x)y_0(x)$$

671.23

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation :

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

en effectuant le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$.

671.24

Soit q une fonction continue et intégrable sur $[0,+\infty[$. On considère l'équation différentielle :

$$y'' + q(t)y = 0 \qquad (E)$$

(a) Montrer que, si f est une solution de (E) bornée sur $[0,+\infty[$, alors $f'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

(b) Soit (h_1,h_2) un système fondamental de solutions de (E). Montrer que le wronskien de (h_1,h_2) est constant.

(c) Montrer que (E) admet des solutions non bornées sur $[0,+\infty[$.

671.25

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$y'' + \mathrm{e}^{-x}y = 0 \qquad (E)$$

On considère f une solution bornée de (E) sur $[0,+\infty[$.

(a) Montrer que f' admet une limite finie en $+\infty$.

(b) Quelle est la valeur de cette limite.

(c) Soit g une autre solution bornée. En étudiant le wronskien de f et g, montrer que les fonctions f et g sont liées. Qu'en déduire ?

671.26

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$.

(a) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R}))$. On définit, pour $u,v \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$:

$$\varphi(u,v) = \det_{\mathcal{B}}(f(u),v) + \det_{\mathcal{B}}(u,f(v))$$

Montrer que φ est bilinéaire alternée, et en déduire que, pour $u,v \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$:

$$\varphi(u,v) = \mathrm{tr}(f)\det_{\mathcal{B}}(u,v)$$

(b) Soit $c_1,c_2 \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ telles que $\det_{\mathcal{B}}(c_1,c_2) = 1$, et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère le système différentiel :

$$Y' = MY \qquad (S)$$

et on note U (resp. V) la solution de (S) telle que $U(0) = c_1$ (resp. $V(0) = c_2$).
Déterminer :

$$W \;:\; t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(U(t),V(t))$$

671.27

On s'intéresse au système différentiel :

$$(S)\ X' = AX \text{ où } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que $A - I_3$ est nilpotente.

(b) Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$.

(c) Résoudre (S) avec la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

671.28

L'espace $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est antisymétrique ;

(ii) Si X est solution de $X' = AX$, alors $\|X\|$ est constante.

671.29

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = \cos(t)x - \sin(t)y \\ y' = \sin(t)x + \cos(t)y \end{cases}$$

671.30

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Sans résoudre, montrer que l'unique solution est un arc paramétré tracé dans un plan de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera. Exprimer ensuite cette solution.

671.31

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + \mathrm{e}^t \\ y' = 3x - y + 2\mathrm{e}^t \end{cases}$$