Intégrales à paramètre

Cours **2**

1 Continuité . . . 2
1.1 Continuité des intégrales à paramètre . . . 2
1.2 Limite des intégrales à paramètre . . . 2
2 Dérivation . . . 3
2.1 Classe $\mathcal{C}^1$ . . . 3
2.2 Extension à la classe $\mathcal{C}^k$ . . . 4
3 Annexes . . . 5
3.1 Annexe : démonstration du théorème de continuité . . . 5
3.2 Complément : démonstration du théorème de dérivation . . . 5

Exercices **6**

Exercices et résultats classiques à connaître . . . 6
Continuité et limite d'une intégrale à paramètre . . . 6
L'incontournable fonction Γ . . . 6
Exemple où l'on peut expliciter $f'(x)$ . . . 6
Transformée de Fourier . . . 6
Transformée de Laplace . . . 7
Exercices du CCINP . . . 8
Exercices . . . 8
Petits problèmes d'entrainement . . . 9

1 Continuité

1.1 Continuité des intégrales à paramètre

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $h : \begin{array}{rcl} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **continue** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que
$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$
où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur I
- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Remarque. *L'hypothèse de domination est vraiment l'hypothèse fondamentale de ce théorème. L'application de ce théorème permet de justifier en particulier que f est définie sur A. Mais l'analyse menée lors de l'étude de la convergence de l'intégrale fournit en général les clefs de la domination.*

Exemple. On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Donner le domaine de définition de f, et étudier sa continuité.

Remarque. *Lorsque l'intégrale n'est pas généralisée, on peut utiliser comme fonction dominante une fonction constante.*

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Raisonnement classique. La continuité étant une propriété locale, on peut appliquer le théorème précédent localement, par exemple sur tout segment de A.

Remarque. *On ne peut pas modifier l'intervalle d'intégration ! Le caractère « local » porte bien sur la variable x, pas la variable d'intégration t.*

Exemple. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $]0,+\infty[$.

1.2 Limite des intégrales à paramètre

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A éventuellement infinie et $h : \begin{array}{rcl} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $t \in I$, $h(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que
$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$
où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- ℓ est intégrable sur I
- $\displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *Il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.*

Exemple. On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$ et on donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \sqrt{\pi}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ pour $x \to +\infty$. Donner un équivalent pour $x \to +\infty$.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \to 0$.

2 Dérivation

Remarque. *Étudier les variations d'une fonction f, c'est comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour $x \leqslant y$. On peut souvent le faire en comparant les intégrandes $h(x,t)$ et $h(y,t)$.*

2.1 Classe $\mathcal{C}^1$

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $h : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est cpm sur I ;
- $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

  où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$: $f'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *L'hypothèse de domination est l'hypothèse fondamentale. Elle justifie aussi l'intégrabilité de $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$.*

Remarque. *L'intégrabilité de $t \mapsto h(x,t)$ est souvent conséquence de la domination du théorème de continuité.*

Exemple. On reprend $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

Étudier la dérivabilité de f puis donner une expression simple de $f(x)$.

On donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Raisonnement classique. La dérivabilité, la classe $\mathcal{C}^1$ sont des notions locales. On peut donc appliquer le théorème précédent localement, par exemple sur tout segment de A.

Exemple. Pour $x \in]-1,+\infty[$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \, \mathrm{d}t$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, et donner une expression de $f'(x)$ à l'aide des fonctions usuelles. En déduire une expression de $f(x)$.

2.2 Extension à la classe $\mathcal{C}^k$

En itérant le théorème de dérivation k-fois, on peut justifier le résultat suivant :

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, $h : \begin{array}{rcl} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Si :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **de classe $\mathcal{C}^k$** sur A ;
- pour tout $p \in \{1,\dots,k-1\}$, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$ satisfait l'**hypothèse de domination** :

$$\left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

  où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A ;
- pour tout $p \in \{1,\dots,k\}$, pour tout $x \in A$: $f^{(p)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t$

3 Annexes

3.1 Annexe : démonstration du théorème de continuité

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, et :

$$h : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$$

Si :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **continue** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que
$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$
où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur I
- la fonction : $f : x \mapsto \int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Preuve. Soit $x_0 \in A$. On va montrer la continuité de f en x_0 en combinant la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée.
Soit $(x_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de A qui converge vers x_0, et $h_n(t) = h(x_n, t)$. Par continuité de $h(\cdot, t)$, on a :

$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{C.S.}} h(x_0, \cdot)$$

Dominons :
$$|h_n(t)| = |h(x_n,t)| \leqslant \varphi(t)$$
qui est indépendant de n, et intégrable sur I.
Donc, par convergence dominée :

$$\int_I h_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I h(x_0,t)\,\mathrm{d}t$$

ce que l'on ré-écrit :

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$$

Par caractérisation séquentielle, on a donc montré que :

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$$

□

3.2 Complément : démonstration du théorème de dérivation

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, et :

$$h : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$$

Si :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est cpm sur I ;
- $\frac{\partial h}{\partial x}$ satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que
$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$
où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- la fonction : $f : x \mapsto \int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$: $f'(x) = \int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$

Preuve. Soit $x_0 \in A$. On s'intéresse à :

$$\begin{aligned}
|\delta(u)| &= \left| f(x_0+u) - f(x_0) - u\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_I \Big(h(x_0+u,t) - h(x_0,t) - u\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,t) \Big)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_I \Big(\int_{x_0}^{x_0+u} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}x - u\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,t) \Big)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_I \Big(\int_{x_0}^{x_0+u} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial h}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \int_I \left| \int_{x_0}^{x_0+u} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial h}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}x \right|\,\mathrm{d}t \\
&= |u| \int_I \underbrace{\left| \frac{1}{u}\int_{x_0}^{x_0+u} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial h}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}x \right|}_{\psi(u,t)}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

avec, pour tout $t \in I$:

$$\psi(u,t) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$$

par dérivabilité de l'intégrale fonction de la borne d'en haut d'une fonction continue.
Dominons :

$$\begin{aligned}
|\psi(u,t)| &\leqslant \frac{1}{u}\int_{x_0}^{x_0+u} \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| + \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,t)\right|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{u}\int_{x_0}^{x_0+u} 2\varphi(t)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\varphi(t)
\end{aligned}$$

pour $u > 0$, et le calcul est le même pour $u < 0$. On a majoré bien dominé, puisqu'on a majoré la valeur absolue de $\psi(u,t)$ par une expression indépendante de u, intégrable sur I.
Par le thérorème de convergence dominée à paramètre continu, on en déduit que :

$$\int_I \psi(u,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[u\to 0]{} 0$$

c'est-à-dire que, au voisinage de $u \to 0$:

$$f(x_0+u) = f(x_0) + u\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}(u)$$

On a donc montré que f est dérivable en x_0, et que :

$$f'(x_0) = \int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t$$

La continuité de f' s'obtient alors en appliquant le théorème de continuité. □

Exercices et résultats classiques à connaître

Continuité et limite d'une intégrale à paramètre

67.1

Montrer que $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t^2} \mathrm{d}t \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et déterminer sa limite en $+\infty$.

L'incontournable fonction Γ

67.2

On pose, pour tout x de $]0, +\infty[$ et pour tout t de $]0, +\infty[$:

$$f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$$

(a) Démontrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose, pour $x \in]0, +\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$

(b) Démontrer que, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(c) Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exemple où l'on peut expliciter $f'(x)$

67.3

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Expliciter $f'(x)$ et en déduire une expression simple de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$.

(c) On admet pour l'instant que f est continue en 0. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$

(d) Démontrer que f est continue en 0.

Transformée de Fourier

67.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $t \mapsto tf(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} f(t) \mathrm{d}t$$

La fonction g est appelée la **transformée de Fourier de** f.
Montrer que g est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

Transformée de Laplace

67.5

Pour f continue sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles, on définit sous réserve d'existence :

$$\mathcal{L}\{f\} \ : \ s \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

appelée **transformée de Laplace** de f.
On suppose dorénavant que :

$$\exists k \in \mathbb{N}^*,\ f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(t^k) \tag{H}$$

et on note $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$.

(a) Montrer que F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

(b) Montrer que $F(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$.

(c) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall s > 0,\ F'(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

Exercices du CCINP

67.6 CCINP 29.3

On pose : $\forall x \in]0,+\infty[, \forall t \in]0,+\infty[, f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

67.7 CCINP 30

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E) .

67.8 CCINP 50

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t.$

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

Exercices

67.9

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$

(a) Déterminer le domaine de définition de F. Étudier la continuité de F sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Déterminer la valeur de $F(0)$.

(c) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

67.10

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^3+t^3}.$

(a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.

67.11

Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \sin(tx)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

67.12

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t.$

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

(b) Montrer que f est solution de l'équation $y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$

(c) Exprimer $f(x)$ à l'aide de $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

67.13

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t.$

(a) Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Établir que f est solution d'une équation différentielle linéaire.

(c) Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner un équivalent de f en 0.

Petits problèmes d'entrainement

67.14 ✍

On définit :

$$f(x)=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{t^{x+1}\ln t}\,\mathrm{d}t$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f, noté D.

(b) Montrer que f est continue sur D.

(c) Déterminer la limite de f en $+\infty$;

(d) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D, et calculer f'.

(e) On pose $\varphi(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. Préciser le domaine de définition de φ et le lien entre φ et f.

(f) En introduisant $\displaystyle\int_x^1\frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t$, déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x\overset{>}{\to}0$.

67.15 ✍

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose :

$$\psi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u \text{ et } \varphi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{x\cos(u)}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$$

(a) Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que φ est continue sur $]0,+\infty[$.

(c) Montrer que :

$$\psi(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0\end{cases}$$

(d) On note $K=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{|\cos(u)-1|}{u^2}\mathrm{d}u$.

d1. Montrer que cette intégrale existe.

d2. Montrer que, pour tout $x>0$, $\left|\varphi(x)-\dfrac{\pi}{2}\right|\leqslant Kx$.

(e) La fonction φ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle continue par morceaux sur $\mathbb{R}$?

67.16

Soit $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t$

(a) Montrer que $F(x)$ existe pour tout réel x.

(b) Développer $F(x)$ en série de fonctions. Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x\to+\infty$.

67.17

Pour $x>0$ on note $F(x)=\displaystyle\int_0^{1/x}\frac{\mathrm{d}t}{x+\sin^2 t}$

(a) Montrer que F est bien définie et étudier sa monotonie.

(b) Déterminer la limite de F en 0 et en $+\infty$.

(c) Poser $\theta=\tan t$ et déterminer un équivalent de F et 0.

67.18

Soit $F\ :\ x\mapsto\displaystyle\int_0^1\frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de F.

(b) Avec le changement de variable $t=u^2$, calculer $F(1/2)$.

(c) En déduire $F(3/2)$.

67.19

Soit $f\ :\ x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$.

(c) Montrer que f admet un développement en série entière et le déterminer.

67.20

On veut calculer pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^2)^n}$.

(a) Calculer $I_1(x)$.

(b) Montrer que la fonction I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $I_n'(x)$ en fonction de $I_{n+1}(x)$.

(c) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, et tout $x > 0$:

$$I_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} \frac{1}{x^{n-\frac{1}{2}}}$$

67.21

(a) Déterminer le domaine de définition réel de :

$$F \;:\; t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(-u^2+\mathrm{i})t^2}}{u^2 - \mathrm{i}} \mathrm{d}u$$

(b) Quelle est la limite de $F(t)$ en $+\infty$?

(c) Déterminer F'.

(d) On admet que $F(0) = \pi \dfrac{1+\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}$.

En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$.

67.22

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Montrer que $f + g^2$ est une fonction constante que l'on déterminera.

(c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ et retrouver ainsi la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

67.23

On considère les deux fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que F et G sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que F et G sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elles sont solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

(c) En déduire la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

67.24

Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose :

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer la continuité de f sur $]0, +\infty[$.

(b) Préciser les limites de f en 0 à droite et en $+\infty$.

67.25

Lorsqu'elle est définie, on note :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x t\,\mathrm{d}t$$

(a) Pour quels réels x cette intégrale existe ?

(b) Montrer que f est continue et décroissante sur son intervalle de définition.

(c) Calculer, pour tout $x > -1$:

$$(x+1)f(x)f(x+1)$$

67.26

Étudier l'existence et la continuité de la fonction définie par :

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+z}\,\mathrm{d}t$$

où $z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.