Équations différentielles linéaires

Cours **2**

Exercices **10**

Sauf mention contraire, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie.

1 Généralités

1.1 Équation différentielle linéaire, système différentiel linéaire

Définition.

- On appelle **équation différentielle linéaire** une équation de la forme :
$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \qquad (E)$$
où $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ sont des applications continues.
- Résoudre (E), c'est déterminer les fonctions $x : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :
$$\forall t \in I,\ x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$
- On appelle **équation différentielle homogène associée à** (E) l'équation :
$$x' = a(t) \cdot x \qquad (H)$$

Remarque. *$a(t)$ est une application linéaire, $a(t) \cdot x(t)$ désigne l'image par cette application linéaire du vecteur $x(t)$. On pourrait la noter $a(t)\big(x(t)\big)$.*

Exemple. Rechercher les $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ M'(t) = t^2 M(t)$$
c'est vouloir résoudre une équation différentielle linéaire homogène, où $a : t \mapsto t^2 \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Traduction matricielle.

Fixons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Notons $A(t) = \mathrm{Mat}(a(t), \mathcal{B})$, $B(t) = \mathrm{Mat}(b(t), \mathcal{B})$ et $X(t) = \mathrm{Mat}(x(t), \mathcal{B})$.

- L'équation différentielle (E) s'écrit sous la forme d'un **système différentiel linéaire** :
$$X' = A(t)X + B(t) \qquad (S)$$
où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ sont des applications continues.
- Résoudre (S), c'est déterminer les fonctions $X : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :
$$\forall t \in I,\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$
- On appelle **système différentiel homogène associé à** (S) :
$$X' = A(t)X$$

Exemple. Rechercher les fonctions $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + (1+t)\,y(t) + t^2 \\ y'(t) = \cos(t)\,x(t) + \sin(t)\,y(t) + 1 + t \end{cases}$$
c'est vouloir résoudre le système différentiel linéaire :
$$X' = A(t)X + B(t)$$
où $A : t \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1+t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$ et $B : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ 1+t \end{pmatrix}$.

Exemple. Le système de Lotka-Volterra qui modélise l'évolution d'une population de proies et de prédateur s'écrit :
$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\big(\alpha - \beta y(t)\big) \\ y'(t) = y(t)\big(\delta x(t) - \gamma\big) \end{cases}$$
C'est un système différentiel, non linéaire. Son étude n'entre pas dans le cadre du programme.

1.2 Principe de superposition

Proposition. Si x_1, x_2 sont solutions de deux équations différentielles linéaires ayant la même équation homogène associée : $x' = a(t) \cdot x + b_1(t)$ et $x' = a(t) \cdot x + b_2(t)$ respectivement, alors $x_1 + x_2$ est solution de l'équation :

$$x' = a(t) \cdot x + \big(b_1(t) + b_2(t)\big)$$

1.3 Problème de Cauchy

Définition. On appelle **problème de Cauchy** l'association d'une équation différentielle linéaire et d'une **condition initiale** :

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$.

Théorème.

La recherche des fonctions $x\ :\ I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\begin{cases} \forall t \in I,\ x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est équivalente à la recherche des fonctions $x\ :\ I \to E$ continues telles que :

$$\forall t \in I,\ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u) \cdot x(u) + b(u)\,\mathrm{d}u$$

Remarque. *On dit qu'on a mis sous forme intégrale le problème de Cauchy.*

Traduction matricielle.

Un **problème de Cauchy** pour un système différentiel linéaire s'écrit :

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

1.4 Représentation d'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n

Définition.

- On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** n une équation de la forme :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) \qquad (E)$$

  où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b\ :\ I \to \mathbb{K}$ sont des applications continues.

- Résoudre (E), c'est déterminer les fonctions $f\ :\ I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telles que :

$$\forall t \in I,\ f^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) + b(t)$$

- On appelle **équation différentielle homogène associée à** (E) l'équation :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y \qquad (E_0)$$

Remarque. *Il importe que l'équation différentielle soit « normalisée », c'est-à-dire que le coefficient devant $y^{(n)}$ soit* 1.

Théorème.

Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n peut être représentée par le système différentiel linéaire :

$$X' = A(t)X + B(t)$$

en posant dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Remarque. *On reconnaît la transposée d'une matrice compagnon.*

Définition. On appelle problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n l'association d'une équation différentielle et d'une condition initiale :

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \in \mathbb{K}$.

Remarque. *Il existe d'autres problèmes, dont l'étude n'est pas au programme, comme celui des conditions aux limites.*

2 Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire

2.1 Théorème de Cauchy linéaire

Théorème de Cauchy linéaire.

Si :

- I est un intervalle
- a et b sont continues sur I

alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.

Remarque. *Ce théorème est un cas particulier d'un théorème plus général, le théorème de Cauchy-Lipschitz.*

Traduction matricielle.

Si :

- I est un intervalle
- A et B sont continues sur I

alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.

Corollaire.
Si :

- I est un intervalle
- $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ sont continues sur I

alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.

Exemple. Soit $\phi : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation homogène :

$$X' = A(t)X$$

où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue sur J. Montrer l'équivalence :

$$\exists t \in I,\ \phi(t) = 0 \iff \forall t \in I,\ \phi(t) = 0$$

2.2 Structure de l'ensemble des solutions — équations homogènes

Théorème.

Si :

- I est un intervalle
- a est continue sur I
- $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions l'équation différentielle linéaire homogène : $x' = a(t) \cdot x$

alors :

- $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$
- pour $t_0 \in I$, $\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_H & \to & E \\ x & \mapsto & x(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels
- $\dim \mathcal{S}_H = \dim E$

Traduction matricielle. Si :

- I est un intervalle
- A est continue sur I
- $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions du système différentiel linéaire homogène : $X' = A(t)X$

alors :

- $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$
- pour $t_0 \in I$, $\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_H & \to & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & X(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels
- $\dim \mathcal{S}_H = n$

Corollaire. Si :

- I est un intervalle
- $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont continues sur I
- $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire scalaire homogène :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y$$

alors :

- $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$
- pour $t_0 \in I$, $\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{K}^n \\ y & \mapsto & \big(y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels
- $\dim \mathcal{S}_H = n$

Remarque. *À part dans le cas où $n = 1$, ou le cas où A est constant, on ne sait en général pas déterminer l'espace vectoriel $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène.*

Définition. Une base de $\mathcal{S}_H$ s'appelle un **système fondamental de solutions** de l'équation homogène.

Exemple. Déterminer une système fondamental de solutions du système :

$$\begin{cases} x'(t) = tx(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + ty(t) \end{cases}$$

On pourra commencer par chercher un système dont sont solutions $u : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}x(t)$ et $v : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}y(t)$.

2.3 Structure de l'ensemble des solutions — équations complète

Théorème.

Si :

- I est un intervalle
- a et b sont continues sur I
- $\mathcal{S}_E$ désigne l'ensemble des solutions l'équation différentielle linéaire : $x' = a(t) \cdot x + b(t)$

alors :

- $\mathcal{S}_E$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de direction $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S}_E = x_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

  et qui est de dimension $\dim E$.

Traduction matricielle. Si :

- I est un intervalle
- A et B sont continues sur I
- $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des solutions du système différentiel linéaire : $X' = A(t)X + B(t)$

alors :

- $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$ dirigé par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S} = X_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

  et qui est de dimension n.

Corollaire. Si :

- I est un intervalle
- $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ sont continues sur I
- $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire scalaire :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t)$$

alors :

- $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ dirigé par $\mathcal{S}_H$:

$$\mathcal{S} = y_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

  et qui est de dimension n.

3 Annexes

3.1 Annexe : théorème de Cauchy linéaire

Théorème.

Si :

- I est un intervalle
- A et B sont continues sur I

alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.

Preuve. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative, par exemple une norme d'opérateur subordonnée à une norme sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

- La mise sous forme intégrale du problème de Cauchy nous amène donc à chercher les fonctions continues $X : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall t \in I,\ X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(u)X(u) + B(u)\big)\,\mathrm{d}u$$

  Pour $X \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$, on définit :

$$\Phi(X)\ :\ t \mapsto X_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(u)X(u) + B(u)\big)\,\mathrm{d}u$$

  de sorte que l'on cherche X telle que $\Phi(X) = X$, c'est-à-dire un point fixe de Φ.

- Commençons par montrer l'existence d'une solution.

On définit par récurrence la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$X_0 \ : \ t \mapsto X_0$$
$$\text{et, } \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \Phi(X_n)$$

Travaillons pour $t \in K = [t_0, b] \subset I$, segment sur lequel les fonctions continues admettent une borne supérieure (le travail sur $[a, t_0] \subset I$ est analogue).

$$\begin{aligned}
&\|X_2(t) - X_1(t)\| \\
&\quad = \|\Phi(X_1)(t) - \Phi(X_0)(t)\| \\
&\quad = \| \int_{t_0}^t A(u)\big(X_1(u) - X_0(u)\big)\,\mathrm{d}u\| \\
&\quad \leqslant \int_{t_0}^t \|A(u)\big(X_1(u) - X_0(u)\big)\|\,\mathrm{d}u \\
&\qquad\qquad \text{par inégalité triangulaire} \\
&\quad \leqslant \int_{t_0}^t \|A(u)\|\|X_1(u) - X_0(u)\|\,\mathrm{d}u \\
&\qquad\qquad \text{par sous-multiplicativité} \\
&\quad \leqslant \int_{t_0}^t \|A\|_\infty^K \|X_1 - X_0\|_\infty^K\,\mathrm{d}u \\
&\quad = \|A\|_\infty^K \|X_1 - X_0\|_\infty^K (t - t_0)
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
&\|X_3(t) - X_2(t)\| \\
&\quad = \|\Phi(X_2)(t) - \Phi(X_1)(t)\| \\
&\quad = \| \int_{t_0}^t A(u)\big(X_2(u) - X_1(u)\big)\,\mathrm{d}u\| \\
&\quad \leqslant \int_{t_0}^t \|A(u)\big(X_2(u) - X_1(u)\big)\|\,\mathrm{d}u \\
&\qquad\qquad \text{par inégalité triangulaire} \\
&\quad \leqslant \int_{t_0}^t \|A(u)\|\|X_2(u) - X_1(u)\|\,\mathrm{d}u \\
&\qquad\qquad \text{par sous-multiplicativité} \\
&\quad \leqslant \int_{t_0}^t \|A\|_\infty^K \|A\|_\infty^K \|X_1 - X_0\|_\infty^K (u - t_0)\,\mathrm{d}u \\
&\qquad\qquad \text{par la majoration précédente} \\
&\quad = \big(\|A\|_\infty^K\big)^2 \|X_1 - X_0\|_\infty^K \frac{(t - t_0)^2}{2}
\end{aligned}$$

Alors, par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| &\leqslant \frac{\big(\|A\|_\infty^K (t - t_0)\big)^n}{n!} \|X_1 - X_0\|_\infty^K \\
&\leqslant \frac{\big(\|A\|_\infty^K (b - t_0)\big)^n}{n!} \|X_1 - X_0\|_\infty^K \\
&\qquad \text{indépendant de } t \\
&\qquad \text{t.g. d'une série convergente}
\end{aligned}$$

Donc $\sum (X_{n+1} - X_n)$ converge normalement, donc uniformément sur K. Par le lien suite-série, la suite $(X_n)_n$ converge sur K ; on note X sa limite.
On a :

$$\begin{aligned}
\|X(t) - X_n(t)\| &= \| \sum_{k=n}^{+\infty} X_{k+1}(t) - X_k(t)\| \\
&\leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \|X_{k+1} - X_k\|_\infty^K \\
&\qquad \text{indépendant de } t \\
&\qquad \text{de limite nulle comme reste} \\
&\qquad\quad \text{d'une série convergente}
\end{aligned}$$

donc la convergence de $(X_n)_n$ vers X est uniforme sur K.
Par transfert de continuité, X est continue sur K
Par définition, on a :

$$\forall n,\ X_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^t \big(A(u)X_n(u) + B(u)\big)\,\mathrm{d}u$$

Par convergence uniforme sur le segment $[t_0, t]$, on a à la limite :

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t \big(A(u)X(u) + B(u)\big)\,\mathrm{d}u$$

ce qui justifie que X est solution du problème de Cauchy sur K.

- Justifions maintenant l'unicité de la solution.
Soit $X, Y \ : \ I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ deux solutions du problème de Cauchy, et $Z = X - Y$.
Pour $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
Z'(t) &= X'(t) - Y'(t) \\
&= \big(A(t)X(t) + B(t)\big) - \big(A(t)Y(t) + B(t)\big) \\
&= A(t)Z(t) \\
\text{et } Z(t_0) &= X(t_0) - Y(t_0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

En mettant sous forme intégrale ce problème de Cauchy, on a donc :

$$Z(t) = 0 + \int_{t_0}^t A(u)Z(u)\,\mathrm{d}u$$

On travaille maintenant pour $t \geqslant t_0$, mais le raisonnement est analogue lorsque $t \leqslant t_0$.

$$\begin{aligned}
\|Z(t)\| &= \| \int_{t_0}^t A(u)Z(u)\,\mathrm{d}u\| \\
&\leqslant \int_{t_0}^t \|A(u)Z(u)\|\,\mathrm{d}u \text{ par inég. triangulaire} \qquad (*) \\
&\leqslant \int_{t_0}^t \|A(u)\|\|Z(u)\|\,\mathrm{d}u \text{ car } \|\cdot\| \text{ sous-multiplicative} \\
&\leqslant \int_{t_0}^t \|A\|_\infty^{[t_0,t]} \|Z\|_\infty^{[t_0,t]}\,\mathrm{d}u \\
&= (t - t_0)\|A\|_\infty^{[t_0,t]} \|Z\|_\infty^{[t_0,t]}
\end{aligned}$$

donc, en reportant dans $(*)$:

$$\begin{aligned}
\|Z(t)\| &\leqslant \int_{t_0}^t \|A(u)\|\|Z(u)\|\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant \int_{t_0}^t \|A(u)\|(u - t_0)\|A\|_\infty^{[t_0,t]} \|Z\|_\infty^{[t_0,t]}\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant \big(\|A\|_\infty^{[t_0,t]}\big)^2 \|Z\|_\infty^{[t_0,t]} \int_{t_0}^t (u - t_0)\,\mathrm{d}u \\
&= \big(\|A\|_\infty^{[t_0,t]}\big)^2 \|Z\|_\infty^{[t_0,t]} \frac{(t - t_0)^2}{2}
\end{aligned}$$

Par récurrence, on établit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|Z(t)\| \leqslant \frac{\big((t - t_0)\|A\|_\infty^{[t_0,t]}\big)^n}{n!} \|Z\|_\infty^{[t_0,t]}$$

On reconnaît le terme général d'une série exponentielle, convergente. En faisant $n \to +\infty$, on en déduit donc :

$$\|Z(t)\| = 0$$

et donc $X(t) = Y(t)$.

□

3.2 Annexe : un résultat utile

Proposition. Soit $X : I \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ une solution du système différentiel linéaire homogène :

$$X' = A(t)X$$

où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue sur I. On dispose de l'alternative : soit X est constante nulle, soit X ne s'annule pas.

Remarque. *On peut reformuler en :*

$$\exists t_0 \in I,\ X(t_0) = 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})} \implies \forall t \in I,\ X(t) = 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})}$$

Preuve. On suppose que X s'annule en t_0. Alors X est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(t_0) = 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})} \end{cases}$$

dont $t \mapsto 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})}$ est une solution évidente. Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, $X = \big(t \mapsto 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})}\big)$. □

3.3 Complément : le wronskien

Définition. Si $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$ sont n solutions de l'équation différentielle linéaire homogène :

$$X' = A(t)X$$

où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue, on appelle **wronskien** associé à $X_1, \dots, X_n$:

$$W : t \mapsto \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$$

Remarque. *Le déterminant est calculé dans la base canonique de* $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Théorème.

Sont équivalentes :

- (i) $(X_1, \dots, X_n)$ base de $\mathcal{S}_H$
- (ii) W est nulle : $\forall t \in I,\ W(t) \neq 0$
- (iii) W s'annule : $\exists t_0 \in I,\ W(t_0) \neq 0$

Preuve.

$\boxed{(i) \implies (ii)}$

On suppose que $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{S}_H$. Pour tout $t \in I$ fixé, on sait que :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathcal{S}_H & \to & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ & X & \mapsto & X(t) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel. Sa matrice relativement aux bases $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathcal{S}_H$ et canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est, par blocs colonnes :

$$A = \big(X_1(t) | \dots | X_n(t)\big)$$

On a donc :

$$0 \neq \det(A) = W(t)$$

$\boxed{(ii) \implies (iii)}$

Cette implication est claire.

$\boxed{(iii) \implies (i)}$

Par contraposée. On suppose que $(X_1, \dots, X_n)$ n'est pas une base de $\mathcal{S}_H$, donc n'est pas libre. Ainsi, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\forall t \in I,\ \lambda_1 X_1(t) + \dots + \lambda_n X_n(t) = 0$$

Ainsi, pour tout t, $\big(X_1(t), \dots, X_n(t)\big)$ est liée donc $W(t) = \det\big(X_1(t), \dots, X_n(t)\big) = 0$. On a montré la négation de (iii). □

Exercices

68.1

L'espace $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est antisymétrique ;

(ii) Si X est solution de $X' = AX$, alors $\|X\|$ est constante.

68.2

Soit $T > 0$, $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ deux applications continues et T-périodiques. On considère ϕ une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$X' = A(t)X + B(t)$$

Montrer que ϕ est T-périodique si et seulement si elle vérifie $\phi(T) = \phi(0)$.
On remarquera que ϕ est T-périodique si et seulement si $\phi = \psi$, où $\psi : t \mapsto \phi(t+T)$.

Petits problèmes d'entrainement

68.3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, supposée non inversible.

(a) Justifier qu'il existe un hyperplan vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ qui contient $\operatorname{Im} A$.

(b) En déduire que les solutions du système différentiel : $X'(t) = AX(t)$ prennent leurs valeurs dans un hyperplan affine, c'est-à-dire le translaté d'un hyperplan vectoriel.

68.4

Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) On suppose dans cette question que $AB = BA$. En dérivant :

$$t \mapsto \exp\big(t(A+B)\big)\exp(-tA) \text{ et } t \mapsto \exp(tB)$$

montrer que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

On ne suppose plus que A et B commutent, et on note $[A, B] = AB - BA$.

(b) En commençant par traiter le cas où $n = 1$, déterminer toutes les fonctions $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M'(t) = tM(t)C$$

(c) On suppose que $C = [A, B]$, $AC = CA$ et $BC = CB$.
Utiliser $t \mapsto \exp(tA)\exp(tB)\exp\big(-t(A+B)\big)$ pour montrer que :

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)\exp\big(-\frac{1}{2}[A,B]\big)$$

68.5

(a) Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de N. Utiliser la définition du déterminant pour montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \det(C_1, \dots, MC_i, \dots, C_n) = \operatorname{tr}(M)\det(N)$$

(b) Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On s'intéresse au système différentiel sur I :

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

On considère n solutions $X_1, \dots, X_n$, et on note :

$$w(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$$

Déduire de la question précédente que, si $t_0 \in I$:

$$\forall t \in I,\ w(t) = w(t_0)\exp\Big(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(u))\,\mathrm{d}u\Big)$$

Que penser du cas où A est constante ?

68.6

Soit $p, q : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère l'équation différentielle, définie sur $[0,1]$:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (E)$$

Montrer que la seule solution de (E) admettant une infinité de racines est la solution nulle.