

## Résolution pratique des équations différentielles linéaires

<b>Cours</b>	<b>2</b>
1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 . . . . .	2
1.1 Position du problème, structure des solutions . . . . .	2
1.2 Résolution : première méthode . . . . .	2
1.3 Résolution : seconde méthode . . . . .	3
1.4 Résolution sur un intervalle sur lequel l'équation n'est pas normalisable . . . . .	3
2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 . . . . .	3
2.1 Position du problème, structure des solutions . . . . .	3
2.2 Étude de l'équation homogène — Wronskien . . . . .	4
2.3 Méthode de variation des constantes . . . . .	4
2.4 Recherche de solutions développables en séries entières . . . . .	5
3 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants . . . . .	5
3.1 Position du problème . . . . .	5
3.2 Résolution théorique à l'aide de l'exponentielle de matrice . . . . .	6
3.3 Problème de Cauchy . . . . .	7
3.4 Résolution effective dans le cas de diagonalisabilité . . . . .	7
3.5 Exemples de résolution effective en dimension 2 . . . . .	8
4 Annexes . . . . .	9
4.1 Rappel : Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants . . . . .	9
4.2 Complément : utilisation du wronskien pour les EDL scalaires d'ordre 2 . . . . .	9
4.3 Complément : méthode de Lagrange pour les EDL scalaires d'ordre 2 . . . . .	10
4.4 Complément : résolution des EDL scalaires homogènes d'ordre $n$ . . . . .	10
<b>Exercices</b>	<b>11</b>
Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .	11
Utilisation des séries entières . . . . .	11
Résolution par changement de fonction inconnue . . . . .	11
Un changement de variable, c'est un changement de fonction inconnue . . . . .	11
Exercices du CCINP . . . . .	12
Exercices . . . . .	12
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	13

Sauf mention contraire,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie.

## 1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

### 1.1 Position du problème, structure des solutions

**Définition.** Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 est une équation de la forme :

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (E)$$

et l'équation homogène associée est :

$$y' + a(x)y = 0 \quad (H)$$

où  $a$  et  $b$  sont des applications continues sur  $I$  intervalle.

**Remarque.** L'équation peut être proposée sous la forme :

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$$

Il importe dans ce cas de travailler sur un **intervalle** sur lequel  $\alpha$  **ne s'annule pas** : l'équation doit être **normalisable** sur  $I$ .

**Structure des solutions.** Si  $a$  et  $b$  sont continues et  $I$  est un intervalle, alors

- $\mathcal{S}_H$  est une droite vectorielle
- $\mathcal{S}_E$  est une droite affine dirigée par  $\mathcal{S}_H$  :

$$\mathcal{S}_E = y_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

### 1.2 Résolution : première méthode

**Méthode.**

1. On qualifie l'équation différentielle, en précisant la continuité des coefficients, le fait qu'on travaille sur un intervalle et on écrit l'équation sous forme normalisée.
2. On trouve une solution particulière notée  $y_{\text{part}}$  de  $(E)$ , par exemple en la cherchant sous une forme particulière.
3. On utilise le résultat exprimant  $\mathcal{S}_H$  : notant  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$ ,  $\mathcal{S}_H = \text{Vect}(x \mapsto e^{-A(x)})$ .
4. On conclut :

$$\mathcal{S}_E = y_{\text{part}} + \text{Vect}(x \mapsto e^{-A(x)})$$

**Remarque.** La méthode de variation de la constante, vue en première année, permet de déterminer une solution particulière lorsque l'on a déterminé  $\mathcal{S}_H$ . Voir aussi la section suivante.

**Exemple.** Résoudre l'équation :

$$x' + x = t^2$$

**Exemple.** Résoudre sur  $]0, +\infty[$  l'équation :

$$xy' - y = x^3$$

### 1.3 Résolution : seconde méthode

#### Méthode.

1. Au brouillon, on calcule  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$ .
2. On effectue le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = z(x)e^{-A(x)}$$

en raisonnant bien par équivalence.

**Exemple.** Résoudre l'équation :

$$(1 + x^2)y' - 2xy = 1 + x^2$$

### 1.4 Résolution sur un intervalle sur lequel l'équation n'est pas normalisable

**Méthode.** Si l'équation n'est pas normalisable sur l'intervalle  $I$  de résolution, on partage  $I$  en sous-intervalles sur lesquels l'équation est normalisable. On résout sur chacun de ces intervalles, puis on effectue un **recollement** des solutions.

**Exemple.** Représenter quelques courbes intégrales et déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}$  des équations différentielles :

$$xy' - y = 0 \quad xy' - 2y = 0 \quad xy' - \frac{1}{2}y = 0$$

## 2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

### 2.1 Position du problème, structure des solutions

**Définition.** Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 est une équation de la forme :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \quad (E)$$

et l'équation homogène associée est :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \quad (H)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des applications continues sur  $I$  intervalle.

**Remarque.** L'équation peut être proposée sous la forme :

$$\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t)$$

Il importe dans ce cas de travailler sur un **intervalle** sur lequel  $\alpha$  **ne s'annule pas** : l'équation doit être **normalisable** sur  $I$ .

**Remarque.** Contrairement aux équations d'ordre 1 ou aux équations d'ordre 2 à coefficients constants, il n'y a pas de formule de résolution. Il n'est donc pas utile d'avoir une équation normalisée, mais il est important qu'elle soit normalisable :  $\alpha$  ne doit pas s'annuler sur  $I$ .

**Remarque.** On présente au § 4.3 une méthode de résolution lorsqu'une solution de  $(H)$  est connue.

**Structure des solutions.** Si  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  continues,  $I$  est un intervalle et  $\alpha$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors

- $\mathcal{S}_H$  est un plan vectoriel
- $\mathcal{S}_E$  est un plan affine dirigé par  $\mathcal{S}_H$  :

$$\mathcal{S}_E = x_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

**Définition.** Un problème de Cauchy donné par :

$$\begin{cases} \alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t) \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0 \end{cases}$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont continues sur  $I$  intervalle,  $\alpha$  ne s'annule pas sur  $I, t_0 \in I$ .  
Il admet une et une seule solution.

**Remarque.** Avec la seule condition  $x(t_0) = x_0$ , ou avec des conditions aux limites comme  $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$ , on ne peut garantir l'existence et l'unicité.

## 2.2 Étude de l'équation homogène — Wronskien

**Étude.** On suppose que  $a, b$  et  $c$  sont des applications continues sur  $I$  intervalle, et on note

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \quad (H)$$

l'équation différentielle linéaire homogène scalaire étudiée. On a

$$\begin{aligned} (H) &\iff \begin{cases} x' &= x' \\ x'' &= -a(t)x' - b(t)x \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -b(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \\ &\iff X' = A(t)X \quad \text{système différentiel noté } H_{\text{mat}} \end{aligned}$$

où  $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$  et  $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -b(t) \end{pmatrix}$ .

Un couple  $(\phi, \psi)$  est un système fondamental de solutions de  $(H)$ , i.e. une base de  $\mathcal{S}_H$ , si et seulement si :

$$\left( \begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix} \right) \text{ est un système fondamental de solutions de } H_{\text{mat}}$$

**Définition.** Si  $\phi$  et  $\psi$  sont deux solutions de  $(H)$  sur  $I$ , on définit leur **wronskien** en posant :

$$W : t \mapsto \begin{vmatrix} \phi(t) & \psi(t) \\ \phi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \phi(t)\psi'(t) - \psi(t)\phi'(t)$$

**Théorème.**

Soit  $\phi$  et  $\psi$  sont deux solutions de  $(H)$  sur  $I$  et  $W$  le wronskien de  $\phi$  et  $\psi$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(\phi, \psi)$  est une base de  $\mathcal{S}_H$
- (ii)  $\forall t \in I, W(t) \neq 0$
- (iii)  $\exists t \in I, W(t) \neq 0$

## 2.3 Méthode de variation des constantes

**Méthode de variation des constantes.** On suppose connu un système fondamental  $(\phi, \psi)$  de solutions de  $(H)$ . Il reste donc à déterminer une solution particulière de  $(E)$ . Appliquer la méthode de variations des constantes, c'est rechercher une solution particulière de  $(E)$  sous la forme :

$$x(t) = \lambda(t)\phi(t) + \mu(t)\psi(t)$$

avec la condition additionnelle :

$$\lambda'(t)\phi(t) + \mu'(t)\psi(t) \forall t \in I$$

**Remarque.**

- $S_H = \text{Vect}(\phi, \psi) = \{t \mapsto \lambda\phi(t) + \mu\psi(t), \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ . Ici, on fait varier les constantes »  $\lambda$  et  $\mu$ .
- On peut se souvenir de la condition additionnelle en disant que n'apparaissent pas de dérivées secondes des « constantes »  $\lambda$  et  $\mu$ .

**2.4 Recherche de solutions développables en séries entières**

**Méthode.** On a vu, lors de l'étude des séries entières, comment rechercher des solutions développables en séries entières d'une équation différentielle linéaire, par exemple d'ordre 1 ou 2.

On note  $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ , on suppose le rayon de convergence  $> 0$  (c'est l'analyse). Dire que  $x$  est solution de l'équation différentielle se traduit (si tout va bien) en une condition sur les  $a_n$  (ici, on raisonne par équivalence sous l'hypothèse  $R > 0$ ). On vérifie que les séries obtenues ont bien un rayon de convergence  $> 0$  (c'est la synthèse).

**Exemple.** Utiliser une série entière pour déterminer l'unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

**Exemple.** On considère l'équation différentielle :

$$t^2 x' - 4tx' + (t^2 - 6)x = 0 \quad (E)$$

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle qui sont somme d'une série entière autour de 0.
2. Déterminer la dimension de l'espace des fonctions qui sont solutions de l'équation sur  $\mathbb{R}$ .

**3 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants****3.1 Position du problème****Définition.**

- On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants** :

$$X' = AX + B(t) \quad (S)$$

où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  est continue.

- Résoudre (S), c'est déterminer les fonctions  $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que :

$$\forall t \in I, X'(t) = AX(t) + B(t)$$

- On appelle **système différentiel homogène associé à (S)** :

$$X' = A(t)X \quad (H)$$

**Remarque.** Un système différentiel linéaire à coefficients constant s'écrit aussi :

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{cases}$$

où les  $a_{ij}$  sont des scalaires (constantes) et les  $b_i$  des fonctions continues sur  $I$  intervalle.

**Proposition.**

- L'ensemble  $\mathcal{S}_H$  des solutions de  $(H)$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .
- L'ensemble  $\mathcal{S}_E$  des solutions de  $(E)$  est un espace affine de dimension  $n$ , dirigé par  $\mathcal{S}_H$  :

$$\mathcal{S}_E = X_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

**Écriture vectorielle.** Un système différentiel linéaire à coefficients constant peut être vu comme la traduction matricielle d'une équation différentielle linéaire :

$$x' = a \cdot x + b(t) \quad (E)$$

où  $a \in \mathcal{L}(E)$  et  $b : I \rightarrow E$  est continues, et où on note  $a \cdot x$  l'image  $a(x)$  du vecteur  $x$  par l'endomorphisme  $a$ .

**Remarque.** On pourrait présenter les résultats de ce paragraphe sous forme vectorielle.

## 3.2 Résolution théorique à l'aide de l'exponentielle de matrice

**Rappel sur l'exponentielle de matrice.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on définit :

$$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

- $t \mapsto \exp(tA)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et sa dérivée est  $t \mapsto A \exp(tA) = \exp(tA)A$ .
- $\exp(A)$  est inversible, et  $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices qui commutent :

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$$

**Résultat : solutions du système différentiel homogène.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les solutions du système différentiel homogène :

$$X' = AX$$

sont les applications :

$$t \mapsto \exp(tA)C$$

où  $C \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

**Remarque.** Dans l'écriture précédente,  $\exp(tA)$  désigne une matrice carrée,  $C$  une matrice colonne. On peut rapprocher l'expression des solutions de :

$$t \mapsto \lambda e^{t\lambda}, \lambda \in \mathbb{K}$$

qui est l'expression des solutions de l'équation scalaire  $y' = ay$ , mais la généralisation doit se faire correctement.

**Résultat : obtention d'une solution particulière par variation de la constante.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  continue. Pour résoudre le système différentiel à coefficients constants :

$$X' = AX + B(t) \quad (E)$$

on a intérêt à effectuer le changement de fonction inconnue :

$$X(t) = \exp(tA)C(t)$$

où  $C : I \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  est  $\mathcal{C}^1$ .

*Preuve.* En effet,  $X'(t) = A \exp(tA)C(t) + \exp(tA)C'(t)$  et donc :

$$X \text{ solution de } (E) \forall t \in I, X'(t) = AX(t) + B(t)$$

$$\forall t \in I, \exp(tA)C'(t) = B(t)$$

$$\forall t \in I, C'(t) = \exp(-tA)B(t)$$

Notant  $F$  une primitive sur  $I$  de  $t \mapsto \exp(-tA)B(t)$ , on peut dire que  $t \mapsto \exp(tA)F(t)$  est une solution particulière de  $(E)$ .  $\square$

### 3.3 Problème de Cauchy

**Définition.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  continue. Soit  $t_0 \in I$  et  $X_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ . On appelle **problème de Cauchy** le problème :

$$\begin{cases} X' = AX + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

#### Théorème de Cauchy linéaire.

Le problème de Cauchy admet une et une seule solution définie sur  $I$ .

*Preuve.*

$$\begin{aligned} X \text{ est solution} &\iff \begin{cases} \forall t \in I, X'(t) = AX(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall t \in I, \exp(-tA)X'(t) - \exp(-tA)AX(t) = \exp(-tA)B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall t \in I, \frac{d}{dt}(\exp(-tA)X(t)) = \exp(-tA)B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall t \in I, \exp(-tA)X(t) = \exp(-t_0A)X(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(-uA)B(u) du \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \\ &\iff \forall t \in I, X(t) = \exp((t-t_0)A)X_0 + \int_{t_0}^t \exp((t-u)A)B(u) du \end{aligned}$$

□

### 3.4 Résolution effective dans le cas de diagonalisabilité

On suppose dans ce paragraphe que  $A$  est diagonalisable :

$$A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } P = (V_1 | \dots | V_n)$$

Les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $A$ , et les  $V_i$  forment une base de vecteurs propres associés.

**Méthode : résolution du système différentiel homogène (H).**

$$\begin{aligned} X \text{ solution de (H)} &\iff \forall t \in I, X'(t) = AX(t) \\ &\iff \forall t \in I, X'(t) = PDP^{-1}X(t) \\ &\iff \forall t \in I, Y'(t) = DY(t) \quad \text{où, pour tout } t, X(t) = PY(t) \\ &\iff \forall t \in I, \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases} \\ &\iff \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}, \forall t \in I, \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t} \end{cases} \\ &\iff \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}, \forall t \in I, Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \\ &\iff \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}, \forall t \in I, X(t) = (V_1 | \dots | V_n) \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \text{Vect} \left( t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i \right)_{1 \leq i \leq n} \end{aligned}$$

On a déterminé un système fondamental de solutions de  $(H)$ .

**Méthode : recherche d'une solutions particulière.**

Par variation de la constante, on cherche une solution sous la forme :

$$X(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) e^{\lambda_i t} V_i$$

où les  $c_i$  sont des fonctions inconnues supposées de classe  $\mathcal{C}^1$ . On calcule :

$$\begin{aligned} X'(t) &= \sum_{i=1}^n c_i'(t) e^{\lambda_i t} V_i + \sum_{i=1}^n c_i(t) \lambda_i e^{\lambda_i t} V_i \\ \text{et } AX(t) &= A \left( \sum_{i=1}^n c_i(t) e^{\lambda_i t} V_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i(t) e^{\lambda_i t} AV_i \\ &= \sum_{i=1}^n c_i(t) e^{\lambda_i t} \lambda_i V_i \text{ car } V_i \text{ vecteur propre associé à la v.p. } \lambda_i \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} X \text{ solution} &\iff \forall t \in I, X'(t) = AX(t) + B(t) \\ &\iff \forall t \in I, \sum_{i=1}^n c_i'(t) e^{\lambda_i t} V_i = B(t) \\ &\iff \forall t \in I, \sum_{i=1}^n c_i'(t) e^{\lambda_i t} V_i = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) V_i \\ &\quad \text{où } (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)) \text{ sont les coordonnées de } B(t) \text{ dans } (V_1, \dots, V_n) \\ &\iff \forall i, \forall t \in I, c_i'(t) = e^{-\lambda_i t} \beta_i(t) \end{aligned}$$

ce qui définit les  $c_i(t)$ , à une constante additive près.

### 3.5 Exemples de résolution effective en dimension 2

**Exemple.** Résoudre le système différentiel  $X' = AX$  où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -29 & -50 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$$

**Exemple.** Résoudre :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + t \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$$



4 Annexes

4.1 Rappel : Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants

**Étude.** Soit  $a, b, c \in \mathbb{K}$ , avec  $a \neq 0$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ . On s'intéresse à :

$$ay'' + by' + cy = f(t) \quad (E)$$

qui est une **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants**. L'équation homogène associée s'écrit, sous forme matricielle :

$$X' = AX \quad (H_{\text{mat}})$$

où  $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$ .

Le polynôme caractéristique de  $A$  est :

$$\chi_A(X) = \frac{1}{a}(aX^2 + bX + c)$$

**Définition.** On appelle **équation caractéristique** de  $(H)$  l'équation :

$$ar^2 + br + c = 0$$

**Théorème.**

On conserve les notations précédentes.

- Si le polynôme caractéristique a deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors :

$$\mathcal{S}_H = \text{Vect} (t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t})$$

- Si le polynôme caractéristique a une racine double  $r_0$ , alors :

$$\mathcal{S}_H = \text{Vect} (t \mapsto e^{r_0 t}, t \mapsto t e^{r_0 t})$$

**Remarque.** Dans le cas particulier, mais fréquent en physique, où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et où l'équation caractéristique admet deux racines distinctes complexes conjuguées  $r \pm i\omega$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \text{Vect} (t \mapsto e^{rt} \cos(\omega t), t \mapsto e^{rt} \sin(\omega t)) \\ &= \{t \mapsto Ae^{rt} \cos(\omega t + \varphi), A, \varphi \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

**Méthode.** On recherche une solution particulière de l'équation :

$$ay'' + by' + cy = Ae^{\lambda t}$$

avec  $a, b, c, \lambda, A$  des scalaires.

- Si  $\lambda$  n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto Be^{\lambda t}$$

- Si  $\lambda$  est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto Bte^{\lambda t}$$

- Si  $\lambda$  est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto Bt^2 e^{\lambda t}$$

**Méthode.** On recherche une solution particulière de l'équation :

$$ay'' + by' + cy = A \cos(\omega t) \quad (\text{resp. } A \sin(\omega t))$$

avec  $a, b, c$  des coefficients réels et  $\omega \neq 0$ .

- Si  $i\omega$  (et donc  $-i\omega$ ) n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$$

- Si  $i\omega$  (et donc  $-i\omega$ ) est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto \lambda t \cos(\omega t) + \mu t \sin(\omega t)$$

4.2 Complément : utilisation du wronskien pour les EDL scalaires d'ordre 2

**Résultat.** Dans le contexte des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (H)$$

Si l'on connaît  $\phi$  une solution particulière de l'équation homogène  $(H)$ , on peut utiliser le

wronskien pour déterminer une deuxième solution de  $(H)$ , indépendante de  $\phi$ .

*Preuve.* Analyse

Si  $\psi$  est une autre solution de  $(H)$ , et  $W$  le wronskien de  $(\phi, \psi)$ ,

on a, pour tout  $t \in I$  :

$$\begin{aligned} W(t) &= \phi(t)\psi'(t) - \phi'(t)\psi(t) \\ \text{et } W'(t) &= \phi(t)\psi''(t) - \phi''(t)\psi(t) \\ &= \phi(t)(-a(t)\psi'(t) - b(t)\psi(t)) \\ &\quad - \psi(t)(-a(t)\phi'(t) - b(t)\phi(t)) \\ &\quad \text{car } \phi, \psi \in \mathcal{S}_H \\ &= -a(t)W(t) \end{aligned}$$

donc  $W$  est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$y' + a(t)y = 0$$

En notant  $A(t) = \int a(t) dt$  une primitive sur  $I$  de  $a(t)$ , il existe donc  $K \in \mathbb{K}$  tel que :

$$W(t) = Ke^{-A(t)}$$

**Synthèse**

On résout l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\phi(t)y' - \phi'(t)y = e^{-A(t)}$$

où l'on a choisit arbitrairement  $K = 1$ . Cela nous fournit une solution de  $(H)$  : l'observation du calcul ci-avant montre que  $W$  est solution de  $y' + a(t)y = 0$  si et seulement si  $\psi$  est solution de  $(H)$ .  $\square$

### 4.3 Complément : méthode de Lagrange pour les EDL scalaires d'ordre 2

**Méthode.** Dans le contexte des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 :

$$\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t) \quad (E)$$

Si l'on connaît  $y_0$  une solution particulière de l'équation homogène  $(H)$ , on a intérêt à effectuer le changement de fonction inconnue :

$$y(t) = z(t)y_0(t)$$

*Explication.* On mène les calculs suivants :

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t)y_0(t) \\ y'(t) &= z'(t)y_0(t) + z(t)y_0'(t) \\ y''(t) &= z''(t)y_0(t) + 2z'(t)y_0'(t) + z(t)y_0''(t) \end{aligned}$$

Pour traduire que  $y$  est solution de  $(E)$ , on fait une combinaison linéaire de ces trois égalités. Comme  $y_0$  est solution de  $(H)$ , les termes en  $z(t)$  se simplifient toujours. On regroupe les termes en  $z''(t)$  et ceux en  $z'(t)$  :

$$\begin{aligned} y \text{ solution} &\iff \forall t \in I, \alpha(t)y_0(t)z''(t) \\ &\quad + (2\alpha(t)y_0'(t) + \beta y_0(t))z'(t) = \gamma(t) \end{aligned}$$

Il s'agit d'une EDL1 en  $y_0'$ , pour laquelle on a donc des formules de résolution.  $\square$

**Exemple.** On veut résoudre sur  $]0, +\infty[$  l'équation :

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - v^2)x = 0$$

où  $v$  est un réel positif.

1. Montrer qu'il existe une unique solution de la forme :

$$J_v = t^v \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad (E)$$

où  $a_0 = 1$ . Sur quel intervalle cette solution est-elle définie ?

2. Dans le cas où  $v = \frac{1}{2}$ , exprimer toutes les solutions de  $(E)$  à l'aide des fonctions usuelles.

### 4.4 Complément : résolution des EDL scalaires homogènes d'ordre $n$

**Proposition.** On considère  $(H)$  une équation différentielle linéaire homogène d'ordre  $n$  à coefficients constants :

$$y^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} \quad (H)$$

de fonction inconnue  $y$  nécessairement  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ .

On note  $D : f \mapsto f'$  endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ , et  $P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ .

L'équation  $(H)$  s'écrit alors :

$$P(D)(y) = 0 \quad (H)$$

et donc  $\mathcal{S}_H = \text{Ker } P(D)$ .

Si  $P = (X - r_1)^{m_1} \dots (X - r_p)^{m_p}$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ ,

alors :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto P_1(t)e^{r_1 t} + \dots + P_p(t)e^{r_p t}, \right. \\ \left. \forall i, P_i \in \mathbb{K}_{m_i-1}[X] \right\}$$

*Preuve.* Par le lemme de décomposition des noyaux :

$$\text{Ker } P(D) = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(D - r_i \text{Id})^{m_i}$$

On va donc montrer que, pour  $r \in \mathbb{K}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$  :

$$\text{Ker}(D - r \text{Id})^m = \left\{ t \mapsto P(t)e^{rt}, P \in \mathbb{K}_{m-1}[X] \right\}$$

Raisonnons par récurrence sur  $m$ .

- Si  $m = 1$ ,  $\text{Ker}(D - r \text{Id})$  est l'ensemble des solutions de l'équation  $y' - ry = 0$ . On sait que c'est  $\{t \mapsto \lambda e^{rt}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

- Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que :  
 $\text{Ker}(D - r\text{Id})^m = \{t \mapsto P(t)e^{rt}, P \in \mathbb{K}_{m-1}[X]\}$   
 On a alors :  
 $y \in \text{Ker}(D - r\text{Id})^{m+1}$   
 $\iff y' - ry \in \text{Ker}(D - r\text{Id})^m$   
 $\iff \exists P \in \mathbb{K}_{m-1}[X], y' - ry = P(t)e^{rt}$   
 Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.  
 On effectue le changement de fonction inconnue  
 $y(t) = z(t)e^{rt}, y'(t) = z'(t)e^{rt} + rz(t)e^{rt}$

Alors :

$$\begin{aligned}
 y &\in \text{Ker}(D - r\text{Id})^{m+1} \\
 &\iff \exists P \in \mathbb{K}_{m-1}[X], z' = P(t) \\
 &\iff \exists Q \in \mathbb{K}_m[X], z = Q(t) \\
 &\iff \exists Q \in \mathbb{K}_m[X], y = Q(t)e^{rt}
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \ker(D - r\text{Id})^{m+1} = \{t \mapsto Q(t)e^{rt}, Q \in \mathbb{K}_m[X]\}$$

On a établi le résultat annoncé.  $\square$

## Exercices et résultats classiques à connaître

### Utilisation des séries entières

#### 69.1

On considère sur  $]0, 1[$  l'équation :

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$$

- Déterminer une solution non nulle, développable en série entière, notée  $y_0$ .
- Résoudre l'équation en effectuant le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = z(x)y_0(x)$$

### Résolution par changement de fonction inconnue

#### 69.2

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$(1 + e^x)y'' + 2e^xy' + (2e^x + 1)y = e^x$$

en effectuant le changement de fonction inconnue :

$$z(x) = (1 + e^x)y(x)$$

### Un changement de variable, c'est un changement de fonction inconnue

#### 69.3

Résoudre sur  $]0, +\infty[$  l'équation :

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

en effectuant le changement de variable  $x = e^t$ .

## Exercices du CCINP

69.4

 31

- Déterminer une primitive de  $x \mapsto \cos^4 x$ .
- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :  $y'' + y = \cos^3 x$  en utilisant la méthode de variation des constantes.

69.5

 32

Soit l'équation différentielle :  $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ .

- Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle  $]-r, r[$  de  $\mathbb{R}$ , avec  $r > 0$ .  
Déterminer la somme des séries entières obtenues.
- Est-ce que toutes les solutions de  $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$  sur  $]0; 1[$  sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur  $]-1, 1[$  ?

69.6

 42

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

- Résoudre l'équation  $(H)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
- Résoudre l'équation  $(E)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
- L'équation  $(E)$  admet-elle des solutions sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  ?

## Exercices

69.7

Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 1$$

69.8

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$(a) \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$(b) \quad y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$(c) \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

$$(d) \quad y'' + y = 0$$

69.9

Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle :

$$(a) \quad y'' + 2y' + 2y = \sin x$$

$$(b) \quad y'' + y = 2 \cos^2 x$$

69.10

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$(t-1)y'' - ty' + y = 0$$

On pourra intuiter deux solutions particulières, polynomiale et exponentielle.

69.11

On s'intéresse à l'équation :

$$t^2 y'' + ty' - y = 0 \quad (E)$$

(a) Rechercher des solutions particulières de la forme  $y(t) = t^\alpha$ .

(b) Résoudre  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

69.12

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$(t^2 + 2t + 2)y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$$

en recherchant des solutions polynomiales.

## Petits problèmes d'entraînement

**69.13**

Soit  $f$  continue et bornée sur  $]0, +\infty[$ . On considère l'équation différentielle :

$$xy' - y + f(x) = 0$$

Montrer qu'elle admet une unique solution  $y_0$  telle que  $y'_0$  ait une limite nulle en  $+\infty$ .

**69.14**

Résoudre sur  $]0, +\infty[$  l'équation :

$$t \ln(t)y' + y = 0$$

**69.15**

(a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = \frac{1}{n^3} e^{inx}$$

(b) Démontrer la continuité sur  $\mathbb{R}$  de la fonction définie par :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} e^{inx}$$

(c) Déterminer les fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  solutions de :

$$y'' + 2y' + y = g(x)$$

**69.16**

Déterminer les solutions complexes de l'équation différentielle :

$$y'' - (1 + 3i)y' - 4y = 0$$

**69.17**

Résoudre sur des intervalles à préciser, par la méthode de variation des constantes, l'équation :

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

**69.18**

Résoudre sur  $]0, +\infty[$  l'équation :

$$x^2 y'' + xy' - \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0$$

en effectuant le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = x^\alpha z(x)$$

où  $\alpha$  est choisi judicieusement.

**69.19**

On considère sur  $]0, 1[$  l'équation :

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$$

(a) Déterminer une solution non nulle, développable en série entière, notée  $y_0$ .

(b) Résoudre l'équation en effectuant le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = z(x)y_0(x)$$

**69.20**

Résoudre sur  $]0, +\infty[$  l'équation :

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0$$

en effectuant le changement de variable  $x = e^t$ .

**69.21**

Soit  $q$  une fonction continue et intégrable sur  $[0, +\infty[$ . On considère l'équation différentielle :

$$y'' + q(t)y = 0 \quad (E)$$

- (a) Montrer que, si  $f$  est une solution de  $(E)$  bornée sur  $[0, +\infty[$ , alors  $f'(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ .
- (b) Soit  $(h_1, h_2)$  un système fondamental de solutions de  $(E)$ . Montrer que le wronskien de  $(h_1, h_2)$  est constant.
- (c) Montrer que  $(E)$  admet des solutions non bornées sur  $[0, +\infty[$ .

**69.22**

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$y'' + e^{-x}y = 0 \quad (E)$$

On considère  $f$  une solution bornée de  $(E)$  sur  $[0, +\infty[$ .

- (a) Montrer que  $f'$  admet une limite finie en  $+\infty$ .
- (b) Quelle est la valeur de cette limite.
- (c) Soit  $g$  une autre solution bornée. En étudiant le wronskien de  $f$  et  $g$ , montrer que les fonctions  $f$  et  $g$  sont liées. Qu'en déduire ?

**69.23**

On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ .

- (a) Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R}))$ . On définit, pour  $u, v \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$  :

$$\varphi(u, v) = \det_{\mathcal{B}}(f(u), v) + \det_{\mathcal{B}}(u, f(v))$$

Montrer que  $\varphi$  est bilinéaire alternée, et en déduire que, pour  $u, v \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$  :

$$\varphi(u, v) = \text{tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(u, v)$$

- (b) Soit  $c_1, c_2 \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$  telles que  $\det_{\mathcal{B}}(c_1, c_2) = 1$ , et  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On considère le système différentiel :

$$Y' = MY \quad (S)$$

et on note  $U$  (resp.  $V$ ) la solution de  $(S)$  telle que  $U(0) = c_1$  (resp.  $V(0) = c_2$ ).

Déterminer :

$$W : t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(U(t), V(t))$$

**69.24**

Donner une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les fonctions solutions sont :

$$x \mapsto \frac{x + \lambda}{1 + x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

**69.25**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  :

$$y' - y = \text{Max}(x, 0)$$

**69.26**

Soit  $a : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue à valeurs positives, et  $A$  sa primitive qui s'annule en 0. Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable.

- (a) On suppose que :

$$\forall x \geq 0, f'(x) \leq a(x)f(x)$$

Montrer que :

$$\forall x \geq 0, f(x) \leq f(0)e^{A(x)}$$

- (b) On suppose que :

$$\forall x \geq 0, f(x) \leq f(0) + \int_0^x a(t)f(t) dt$$

Montrer encore que :

$$\forall x \geq 0, f(x) \leq f(0)e^{A(x)}$$

**69.27**

Soit  $a > 0$  et  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que :

$$f'(x) + af(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Montrer que :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

**69.28**

Soit  $g$  vérifiant, au voisinage de 0, l'équation différentielle :

$$y' = \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k} \right) y$$

Montrer que  $g$  est développable en série entière, et en déduire que  $x \mapsto \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}\right)$  l'est aussi.

**69.29**

Déterminer les valeurs de  $a, b \in \mathbb{R}$  pour que les solutions de :

$$y'' + ay' + by = 0$$

soient toutes bornées sur  $\mathbb{R}_+$ .

**69.30**

Déterminer les fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que :

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) - f(x) = f(0) + f(1)$$

**69.31**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$(x^2 + 1)^2 y'' + 2x(x^2 + 1)y' + 4y = 0$$

en effectuant le changement de variable  $t = \text{Arctan } x$ .

**69.32**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Exprimer à l'aide d'une intégrale la solution de l'équation différentielle :

$$y'' + y = f(x)$$

vérifiant les conditions initiales :

$$y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0$$

**69.33**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que :

$$f + f'' \geq 0$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + \pi) + f(x) \geq 0$$

**69.34**

Soit  $p, q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues. On s'intéresse à l'équation :

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (E)$$

Montrer que si une solution sur  $[0, 1]$  de  $(E)$  possède une infinité de racines, c'est la fonction nulle.

**69.35**

On s'intéresse à l'équation :

$$y'' + e^{-x}y = 0 \quad (E)$$

et on considère  $f$  une solution bornée de  $(E)$  sur  $[0, +\infty[$ .

- Montrer que  $f'$  admet une limite finie en  $+\infty$ .
- Quelle est la valeur de cette limite ?
- Soit  $g$  une autre solution bornée de  $(E)$  sur  $[0, +\infty[$ . En étudiant le wronskien de  $f$  et  $g$ , établir que les fonctions  $f$  et  $g$  sont liées. Que peut-on en conclure ?

**Exercices****69.1**

(a) Déterminer une solution particulière, puis résoudre sur  $]0, +\infty[$  l'équation :

$$2x^2y' + xy = 1$$

(b) Utiliser la méthode de variation de la constante pour résoudre :

$$xy' - y = x \ln x$$

(c) Déterminer les solutions définies sur  $\mathbb{R}$  de :

$$xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$$

**69.2**

(a) Résoudre :

$$x'' + 2x' + x = e^{-t}$$

(b) Résoudre :

$$x'' + x' + x = t^2 + e^t$$

(c) Utiliser le changement de variable  $t = e^x$  pour résoudre sur  $]0, +\infty[$  :

$$t^2y'' + 4ty' + 2y = 1$$

**69.3**

Déterminer les solutions développables en série entière de :

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$$



**69.36**

On s'intéresse au système différentiel :

$$(S) \quad X' = AX \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que  $A - I_3$  est nilpotente.  
 (b) Calculer, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(tA)$ .

- (c) Résoudre (S) avec la condition initiale  $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**69.37**

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 2x - 3y \end{cases}$$

**69.38**

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = \cos(t)x - \sin(t)y \\ y' = \sin(t)x + \cos(t)y \end{cases}$$

**69.39**

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Sans résoudre, montrer que l'unique solution est un arc paramétré tracé dans un plan de  $\mathbb{R}^3$  que l'on précisera. Exprimer ensuite cette solution.

**69.40**

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + e^t \\ y' = 3x - y + 2e^t \end{cases}$$

**69.41**

On considère  $I$  un intervalle, et le système différentiel linéaire homogène :

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) \quad (E)$$

où  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est continue. On note  $S_H$  l'ensemble des solutions de (E).

- (a) Pourquoi, à  $t_0 \in I$  fixé,  $\Phi_{t_0} : X \mapsto X(t_0)$  est un isomorphisme de  $S_H$  sur  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ .

Pour  $t, t_0 \in I$ , on note :

$$R(t, t_0) = \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}$$

On l'appelle **résolvante** en  $(t, t_0)$  de (E).

- (b) Expliquer pourquoi  $R(t, t_0)$  est un isomorphisme. Quelle est sa réciproque ?  
 (c) Comment utiliser  $R(t, t_0)$  pour résoudre (E) ?  
 (d) Expliciter la résolvante  $R(t, t_0)$  pour l'équation différentielle scalaire :

$$x'(t) = a(t)x(t)$$