Continuité des fonctions de plusieurs variables

Dans tout le chapitre, et sauf mention contraire, E, F, G désignent des espaces vectoriels réels de dimension finie.

1 De quoi parle-t-on ?

1.1 Des fonctions entre espaces vectoriels normés

On peut s'intéresser à des fonctions :

$$\begin{array}{rrcl} f \,:\, & A \subset E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

et se poser la question de la continuité de f.

Exemple. $f \,:\, M \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{tr}(M^\top M)}$ est une fonction $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

Exemple. $u \,:\, f \mapsto \displaystyle\int_0^1 \cos(f(t))\,\mathrm{d}t$ est une fonction $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Définition. Soit $f \,:\, E \to F$ définie sur A.

- Soit $a \in \overline{A}$ et $b \in F$. On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A\ \|x-a\|_E \leqslant \eta \implies \|f(x)-b\|_F \leqslant \varepsilon$$

- Soit $a \in A$. On dit que f est **continue en** a lorsque :

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$$

- f est **continue sur** A lorsqu'elle est continue en tout point de A.
- Soit $a \in \overline{A} \setminus A$ un point adhérent de A où f n'est pas définie. On dit que f se prolonge par continuité en a si f admet une limite b en a. La fonction prolongée est :

$$f \,:\, x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$$

  Elle est continue en a.

Remarque. *La continuité peut être établie « par opérations algébriques » sur des fonctions que l'on sait continues.*

1.2 Des fonctions entre espaces vectoriels normés automatiquement continues

Proposition.

- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et E de dimension finie, alors f est continue.
- En particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, les applications : $\pi_i \,:\, x \mapsto x_i$, où $(x_1, \dots, x_n)$ est le n-uplet des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, sont continues.
- Si f est multilinéaire sur un produit d'espaces normés de dimension finie, alors f est continue.
- Si f est polynomiale sur un espace normé de dimension finie, alors f est continue.

1.3 Des fonctions de plusieurs variables

Remarque. *Fréquemment, on étudie des fonctions :*

$$\begin{array}{rrcl} f \,:\, & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^p \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)\big) \end{array}$$

La continuité de f est équivalente à la continuité de $f_1, \dots, f_p$. On peut donc se contenter d'étudier les fonctions numériques de plusieurs variables.

Remarque. *La compréhension de la continuité pour les fonctions de deux variables est indispensable pour l'étude des fonctions de n variables.*

Proposition. Les applications :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array}$$

sont continues.

Exemple. Étudier la continuité de :

$$(x,y) \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) \ln(x^2+y^2)$$

sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

2 Techniques d'étude de la continuité des fonctions de deux variables

2.1 Montrer la continuité « par opérations », sauf éventuellement en un point

Exemple. Montrer que la fonction :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\left(\sin(x^2+y^2)\right)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2.2 Montrer la non continuité en un point particulier

Exemple. Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exemple. Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction :

$$g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exemple. Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction :

$$h : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2.3 Montrer la continuité en un point particulier, prolonger une fonction par continuité

Exemple. Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exemple. Prolonger par continuité en $(0,0)$ la fonction :

$$g \,:\, (x,y) \mapsto xy\ln(x^2+y^2)$$

Exemple. Montrer que la fonction :

$$h \,:\, (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\big(\sin(x^2+y^2)\big)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue en $(0,0)$.

Exemple. Montrer que la fonction :

$$k \,:\, (x,y) \mapsto \frac{x^5}{\operatorname{Arctan}(x^4+y^4)}$$

se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

3 Continuité sous le signe $\int$

Théorème.

Soit $h \,:\, X \times I \to \mathbb{K}$, où $X \subset E$ est une partie d'un espace normé de dimension finie.
Si :

- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **continue** sur X ;
- Pour tout $x \in X$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que :

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \forall (x,t) \in X \times I$$

  où $\varphi(t)$ est intégrable sur I, indépendante de x.

Alors :

- $f \,:\, x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur X.

Remarque. *Il s'agit d'une simple adaptation du théorème connu pour la variable réelle au cas d'une variable dans un espace vectoriel normé de dimension finie.*

Adaptation pour domination locale. Soit $h \,:\, X \times I \to \mathbb{K}$, où $X \subset E$ est une partie d'un espace normé de dimension finie. Soit $a \in X$.
Si :

- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **continue** sur X ;
- Pour tout $x \in X$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination locale** : il existe V voisinage relatif de a dans X, et φ telle que :

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \forall (x,t) \in V \times I$$

  où $\varphi(t)$ est intégrable sur I, indépendante de x.

Alors :

- $f \,:\, x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie sur V et continue en a.

4 Suites et séries de fonctions

Rappel des théorèmes.

Les fonctions considérées sont $A \subset E \to F$ où E et F sont des espaces normés de dimension finie.

- Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A ou sur tout compact de A (resp. au voisinage de a) et si les f_n sont continues sur A (resp. en a), alors f est continue sur A (resp. en a).
- Si $\sum f_n$ converge uniformément sur A ou sur tout compact de A (resp. au voisinage de a) et si les f_n sont continues sur A (resp. en a), alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A (resp. en a).

Exemple. Montrer que :

$$(x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x + \mathrm{i}y)^n}{(2n)!}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercices du CCINP

71.1 CCINP 33.1

On pose : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $f\,(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0)=0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

71.2 CCINP 52.12

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. Prouver que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy\geqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

71.3 CCINP 57.1

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercices

71.4

Peut-on prolonger par continuité en $(0,0)$ les fonctions définies par :

(a) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(b) $\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

(c) $\dfrac{\sin(x)\ \mathrm{sh}(y)}{xy}$

(d) $\dfrac{\sin(x)-\mathrm{sh}(y)}{\mathrm{sh}(x)-\sin(y)}$

71.5

Peut-on prolonger par continuité en $(0,0)$ les fonctions définies par :

(a) $\dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}$

(b) $\dfrac{x^2y}{x^2-xy+y^2}$

(c) $\dfrac{x^3y^4}{x^4+y^6}$

(d) $\dfrac{xy^4}{x^4+y^6}$

(e) $\dfrac{\mathrm{e}^{xy}-1}{\mathrm{e}^{x}-1}$

71.6

Soit $a,b>0$. Étudier la limite, pour $(x,y)\to(1,1)$, de :

$$\frac{x^ay^b-1}{xy-1}$$

Petits problèmes d'entrainement

71.7

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de :

$$f\ :\ (x,y) \mapsto \begin{cases} y^2 & \text{si } y \leqslant |x| \\ x^4 & \text{si } y > |x| \end{cases}$$

71.8

On donne : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.
On définit, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/4t}$$

et, pour $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on définit, pour x,t réels :

$$Kf(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\Gamma(x-y,t)\,\mathrm{d}y & \text{si } t > 0 \\ f(x) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

(a) Justifier l'existence de Kf, et démontrer :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,$$
$$Kf(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + v\sqrt{4t})\mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v$$

(b) Montrer que Kf est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.