Calcul différentiel

Cours **2**

Exercices **11**

Sauf mention contraire, E et F designent des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

1.1 Dérivée selon un vecteur

Définition. Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U. Soit $a \in U$ et $v \in E$. On dit que f **admet un dérivée en a selon v** lorsque :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & F \\ t & \mapsto & f(a+tv) \end{array}$$

est dérivable en 0.
Dans ce cas, on note $\mathrm{D}_v f(a)$ la dérivée en 0 de cette application, et on l'appelle **dérivée de f en a selon v**.

Remarque.
- *Comme U est ouvert, c'est un voisinage de a, et donc il existe $\delta > 0$ tel que, $\forall t \in [-\delta, \delta]$, $a + tv \in U$: la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ est définie au voisinage de 0.*
- *$\mathrm{D}_v f(a)$ est un élément de F.*

Exemple. On considère :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ selon tout vecteur $v = (\alpha, \beta)$. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

1.2 Dérivées partielles dans une base

Définition. On suppose E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On considère $f : E \to F$ une fonction définie sur U ouvert de E, et $a \in U$.
Si f est dérivable en a selon e_i pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on dit que f **admet des dérivées partielles dans la base $\mathcal{B}$**, et on note :

$$\partial_i f(a) = \mathrm{D}_{e_i} f(a)$$

Remarque.
- *En notant $(a_1, \dots, a_n)$ les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de a, $\partial_i f(a)$ est, si elle existe, la dérivée en a_i de :*

$$t \mapsto f(a_1 e_1 + \dots + t e_i + \dots + a_n e_n)$$

- *On utilise aussi la notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ pour désigner $\partial_i f(a)$.*
- *Lorsqu'une base $\mathcal{B}$ de E est fixée, on identifie $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$, où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.*
- *Souvent, $E = \mathbb{R}^2$ (ou $E = \mathbb{R}^3$) et la base $\mathcal{B}$ est canonique. On note alors $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ et les dérivées partielles, lorsqu'elles existent, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.*

Exemple. On considère :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point, et les calculer.

Exemple. Calculer les trois dérivées partielles dans la base canonique, en un point quelconque, de l'application :

$$f : (r, \varphi, \theta) \mapsto (r \cos\theta \cos\varphi, r \cos\theta \sin\varphi, r \sin\theta)$$

2 Différentielle

2.1 Notation $o(h)$

Définition. Soit $\alpha : E \to F$ définie sur un voisinage de 0_E. On dit que :

$$\alpha(h) = \underset{h\to 0_E}{o}(h)$$

lorsque $\|\alpha(h)\|_F = \underset{h\to 0_E}{o}(\|h\|_E)$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\|h\|_E}\alpha(h) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F$$

2.2 Différentielle d'une application en un point

Rappel. *Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$, on dit que f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que :*

$$f(a+h) = f(a) + \ell h + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

et l'application $h \mapsto \ell h$ est linéaire. C'est cette application linéaire qui permet la généralisation de la dérivation aux fonctions de variable vectorielle.

Définition. Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U, et $a \in U$. On dit que f **est différentiable en** a lorsqu'il existe une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \underset{h\to 0_E}{o}(h)$$

L'application ℓ est alors unique, et appelée **différentielle de** f **en** a, notée $\mathrm{d}f(a)$.

Remarque.

- *La différentielle de f en a s'appelle aussi* ***application linéaire tangente à*** f ***en*** a.
- *La différentiabilité de f en a, c'est l'existence d'un* ***développement limité à l'ordre*** 1 ***en*** a *:*

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \underset{h\to 0_E}{o}(h)$$

où $\mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}(E, F)$.

- *On note souvent $\mathrm{d}f(a)\cdot h$ pour désigner $\big(\mathrm{d}f(a)\big)(h)$.*

Exemple. Déterminer la différentielle en $a = (2, 1)$ de :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 y^3$$

Exemple. Calculer la différentielle en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & X^2 \end{array}$$

Exemple. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint de E. Montrer que :

$$f : x \mapsto \langle x, u(x)\rangle$$

est différentiable en tout $a \in E$, et calculer sa différentielle.

Proposition. Soit $f : E \to F$ définie sur U ouvert.

- Si f est constante, alors elle est différentiable en tout point de u et :

$$\forall a \in U,\ \mathrm{d}f(a) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$$

- Si f est (la restrictuion d'une application) linéaire, alors elle est différentiable en tout point de u et :

$$\forall a \in U,\ \mathrm{d}f(a) = f$$

Proposition. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Proposition. Si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées en a selon tout vecteur et :

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot v$$

Corollaire. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées partielles en a dans la base $\mathcal{B}$ et :

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}f(a) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

où $(h_1, \dots, h_n)$ sont les coordonnées de h dans $\mathcal{B}$.

Définition. Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$, lorsque $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en a, on appelle **matrice jacobienne de f en a** la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques :

$$\mathrm{J}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$$

où $f_1, \dots, f_p$ sont les fonction coordonnées de f.

2.3 Différentielle d'une application sur un ouvert

Définition. Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U. On dit que f **est différentiable sur U** lorsqu'elle est différentiable en tout point $a \in U$. On appelle **différentielle de f sur U** l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}f & \to & \mathcal{L}(E, F) \\ a & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

Remarque. *Les physiciens écrivent :*

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$$

et ils ont bien raison.
En effet, en notant $x_i : x \mapsto x_i$ l'application qui, à un vecteur x de E, associe sa coordonnée x_i dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, on définit une application linéaire. On a donc :

$$\forall a \in U,\ \mathrm{d}x_i(a) = x_i$$

et donc, pour tout $h \in E$:

$$\mathrm{d}x_i(a) \cdot h = x_i(h) = h_i$$

Finalement, pour tout $a \in U$, on a les égalités dans F :

$$\begin{aligned} \forall h \in E,\ \mathrm{d}f(a) \cdot h &= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \mathrm{d}x_i(a) \cdot h \end{aligned}$$

donc, dans $\mathcal{L}(E, F)$:

$$\forall a \in U,\ \mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \mathrm{d}x_i(a)$$

ce qui peut encore s'écrire, dans $\big(\mathcal{L}(E, F)\big)^U$:

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$$

2.4 Cas où $E = \mathbb{R}$: fonctions d'une variable réelle

Proposition. Soit $f : \mathbb{R} \to F$ une fonction d'une variable réelle, définie sur un intervalle ouvert U, et $a \in U$. f est différentiable en a si set seulement si f est dérivable en a. Dans ce cas :

$$f'(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot 1$$

Remarque. *Ainsi, l'application linéaire tangente de f en a est l'application :*

$$h \mapsto f'(a)h$$

2.5 Cas où E est euclidien

Définition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur un ouvert U, et $a \in U$. On suppose que E est un espace euclidien, et que f est différentiable en a.
Alors il existe un unique vecteur, appelé **gradient de f en** a, et noté $\nabla f(a)$, tel que :

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}f(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

Remarque. *Ainsi, lorsque f est différentiable en a :*

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \underset{h \to 0}{o}(h)$$

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Alors :

$$\nabla f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, e_k$$

En particulier, lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique :

$$\nabla f(a) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \Big)$$

Interprétation géométrique. Si $\nabla f(a) \neq 0$, alors $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Remarque. *Bref, $\nabla f(a)$ indique la direction de plus grande variation de f : le vecteur unitaire v pour lequel $\mathrm{D}_v f(a)$ est maximale est :*

$$v = \frac{1}{\|\nabla f(a)\|} \nabla f(a)$$

3 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

Définition. Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U. On dit que f **est de classe $\mathcal{C}^1$ sur** U lorsqu'elle est différentiable en tout point de U, et que :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}f : & U & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ & a & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

est continue sur U.

Remarque. *Comme $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes.*

Théorème.

Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si les dérivées partielles de f dans la base $\mathcal{B}$ existent et sont continues sur U.
Dans ce cas :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Remarque. *Ce résultat est indépendant du choix de la base.*

Exemple. Montrer que :

$$h : (r, \varphi, \theta) \mapsto (r\,\cos\theta\,\cos\varphi, r\,\cos\theta\,\sin\varphi, r\,\sin\theta)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple. Montrer que :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mais pas sur $\mathbb{R}^2$.

4 Opérations sur les applications différentiables, sur les applications $\mathcal{C}^1$

4.1 Linéarité

Proposition. Soit $f, g : E \to F$ deux fonctions définies sur U ouvert, $a \in U$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si f et g sont différentiables en a, alors $\lambda f + \mu g$ aussi et :

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a)$$

Proposition. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi.

Proposition. Si f et g admettent des dérivées en a selon un vecteur v, alors $\lambda f + \mu g$ aussi et :

$$\mathrm{D}_v(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{D}_v f(a) + \mu \mathrm{D}_v g(a)$$

Proposition. Si E est muni d'une base $\mathcal{B}$, si f et g admettent des dérivées partielles en a alors $\lambda f + \mu g$ aussi et :

$$\forall i,\ \partial_i(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \partial_i f(a) + \mu \partial_i g(a)$$

4.2 Composée avec une application bilinéaire ou multilinéaire

Proposition. Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux fonctions définies sur U ouvert, $a \in U$. Soit $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire. Si f et g sont différentiables en a, alors $B(f,g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$ aussi et :

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}\big(B(f,g)\big)(a) \cdot h = B\big(\mathrm{d}f(a) \cdot h, g(a)\big) + B\big(f(a), \mathrm{d}g(a) \cdot h\big)$$

Proposition. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors $B(f,g)$ l'est aussi.

Généralisation. Soit $f_1, \dots, f_p$ des fonctions définies sur U ouvert de E, à valeurs dans $F_1, \dots, F_p$ respectivement. Soit $a \in U$. Soit $M \,:\, F_1 \times \cdots \times F_p \to G$ une application p-linéaire. Si $f_1, \dots, f_p$ sont différentiables en a, alors $M(f_1, \dots, f_p) \,:\, x \mapsto M(f_1(x), \dots, f_p(x))$ aussi et, pour tout $h \in E$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\big(M(f_1, \dots, f_p)\big)(a) \cdot h = M\big(\mathrm{d}f_1(a) \cdot h, f_2(a), \dots, f_p(a)\big) + M\big(f_1(a), \mathrm{d}f_2(a) \cdot h, \dots, f_p(a)\big) \\ + \cdots + M\big(f_1(a), f_2(a) \dots, \mathrm{d}f_p(a) \cdot h, \big)\end{aligned}$$

Proposition. Si les f_k sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors $M(f_1, \dots, f_p)$ l'est aussi.

4.3 Composition d'applications différentiables

Règle de la chaîne. Soit $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ deux applications, avec f définie sur U ouvert de E, g définie sur V ouvert de F et f à valeurs dans V.
Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g\big(f(a)\big) \circ \mathrm{d}f(a)$$

Proposition. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et V respectivement, alors $g \circ f$ est $\mathcal{C}^1$ sur U.

4.4 Dérivée le long d'un arc

Dérivée le long d'un arc. Soit $\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} E \xrightarrow{F} F$ deux applications, avec γ un arc défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f définie sur un ouvert U et γ à valeurs dans U. Soit $t \in I$. Si γ est dérivable en t et f différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$$

Dans le cas où E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et que $x_1, \dots, x_n$ désignent les applications coordonnées de γ dans cette base, cela s'écrit :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k'(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

Proposition. Si γ et f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et U respectivement, alors $f \circ \gamma$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

Corollaire. Soit $[0,1] \xrightarrow{\gamma} E \xrightarrow{F} F$ deux applications, avec γ un arc défini sur un intervalle $[0,1]$, f définie sur un ouvert U et γ à valeurs dans U. Soit $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$. Si γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t) \,\mathrm{d}t$$

Remarque. *En particulier, avec $\gamma(t) = a + tv$:*

$$f(a+v) = f(a) + \int_0^1 \mathrm{d}f(a+tv) \cdot v \,\mathrm{d}t$$

Exemple. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $t \,:\, \big(u(t), v(t)\big)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$h \,:\, t \mapsto f\big(u(t), v(t)\big)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $h'(t)$ à l'aide des dérivées partielles de f et des dérivées de u et v.

Exemple. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et $t \,:\, \big(u(t), v(t), w(t)\big)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$h \,:\, t \mapsto f\big(u(t), v(t), w(t)\big)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $h'(t)$ à l'aide des dérivées partielles de f et des dérivées de u, v et w.

4.5 Calcul des dérivées partielles d'une fonction composée

Exemple. Soit

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & F \\ & (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & f(x_1,x_2,x_3) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert V, et

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & \big(g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v)\big) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U et à valeurs dans V.
On considère la composée :

$$h : (u,v) \mapsto f\big(g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v)\big)$$

Justifier que h est $\mathcal{C}^1$ sur V, et exprimer les dérivées partielles de h en fonction de celles de f et g.

Exemple. Dans le plan euclidien usuel, exprimer le gradient en coordonnées polaires.

Exemple. Écrire les dérivées partielles de :

$$(u_1,\dots,u_m) \mapsto f\big(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_m(u_1,\dots,u_m)\big)$$

4.6 Caractérisation des applications constantes

Théorème.

Soit $f : E \to F$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert, avec E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. On suppose U convexe. Alors :

$$f \text{ est constante sur } u \iff \mathrm{d}f \text{ est nulle sur } U$$

Remarque. *Le résultat est encore valable si U n'est que connexe par arcs.*

5 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Définition. Soit X une partie non vide de E et $x \in X$.
On dit qu'un vecteur $v \in E$ est **tangent à X en x** lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to E$, à valeurs dans X, dérivable en 0, et tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.
On note T_xX l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.

Exemple. Pour X est un ouvert de E et $x \in X$, déterminer T_xX.

Exemple. Pour $X = a + F$ sous-espace affine de E et $x \in X$, déterminer T_xX.

Exemple. Lorsque E est euclidien, $X = S(0,1)$ la sphère unité et $x \in X$, déterminer T_xX.

Exemple. Pour $E = \mathbb{R}^3$, X graphe d'une fonction numérique $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert U et $x \in X$, montrer que T_xX est un plan vectoriel.

Exemple. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Théorème.

Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. On considère l'ensemble :

$$X = \{x \in U,\ g(x) = 0\}$$

Si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$, alors :

$$T_xX = \mathrm{Ker}\,\big(\mathrm{d}g(x)\big)$$

C'est un hyperplan, comme noyau d'une forme linéaire non nulle.

Preuve. Démonstration hors programme. □

Corollaire. Lorsque E est euclidien, la différentielle peut être représentée par le gradient :
Si $x \in X$ et $\nabla g(x) \neq 0_E$, alors :

$$T_x X = \big(\nabla g(x)\big)^{\perp}$$

C'est un hyperplan, et $\nabla g(x)$ en est un vecteur orthogonal.

Corollaire. Lorsque $E = \mathbb{R}^3$ et :

$$X = \{(x, y, z),\ g(x, y, z) = 0\}$$

alors, pour $m \in X$, si $\nabla(g)(m) \neq (0, 0, 0)$, l'ensemble $T_m X$ des vecteurs tangents à X en m est l'hyperplan d'équation :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(m)x + \frac{\partial g}{\partial y}(m)y + \frac{\partial g}{\partial z}(m)z = 0$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer l'espace tangent à un point l'ensemble :

$$X = \{(x, y),\ x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer l'espace tangent à un point l'ensemble :

$$X = \{(x, y),\ y^2 - 4(1 - x^2)x^2 = 0\}$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer l'espace tangent à un point l'ensemble :

$$X = \{(x, y, z),\ x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0\}$$

6 Annexes

6.1 Annexe : caractérisation par des dérivées partielles des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition. Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U. On dit que f **est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U** lorsqu'elle est différentiable en tout point de U, et que :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}f : & U & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ & a & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

est continue sur U.

Théorème.

Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si les dérivées partielles de f dans la base $\mathcal{B}$ existent et sont continues sur U.
Dans ce cas :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Preuve.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les dérivées partielles existent et, pour tout $a \in U$ et $k \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot e_k$$

Mais $a \mapsto \mathrm{d}f(a)$ est continue et $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & F \\ \ell & \mapsto & \ell(e_k) \end{array}$ est aussi continue, car linéaire sur un espace de dimension finie. Par composition $a \mapsto \mathrm{d}f(a) \cdot e_k$ est continue.

On a montré que les $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ existent et sont continues sur U.

$\boxed{\Leftarrow}$ On traite le cas où $n = 2$, pour simplifier l'écriture. Cela ne change pas le raisonnement. On suppose donc que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ existent et sont continues sur U.

1. Montrons que f est différentiable en tout $a \in U$.
   Soit $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 \in U$. On cherche une application linéaire ℓ telle que, avec $h = h_1 e_1 + h_2 e_2$ au voisinage de $(0,0)$:

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \underset{h \to 0}{o}(h)$$

Écrivons :

$$\begin{aligned}
&f(a+h) - f(a) \\
&\quad = f(a + h_1 e_1 + h_2 e_2) - f(a + h_1 e_1) \\
&\qquad\quad + f(a + h_1 e_1) - f(a) \\
&\quad = h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a + h_1 e_1) + \underset{h_2 \to 0}{o}(h_2) \\
&\qquad\quad + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \underset{h_1 \to 0}{o}(h_1) \\
&\quad = h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \underset{h_1 \to 0}{o}(1) \right) + \underset{h_2 \to 0}{o}(h_2) \\
&\qquad\quad + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \underset{h_1 \to 0}{o}(h_1) \\
&\qquad\quad \text{par continuité de } \frac{\partial f}{\partial x_2} \text{ en } a \\
&\quad = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \underset{h \to 0}{o}(h) \\
&\qquad\quad \text{car } |h_k| \leqslant \|h\| \text{ pour } \|\cdot\|_\infty \text{ par exemple} \\
&\quad = \ell(h) + \underset{h \to 0}{o}(h)
\end{aligned}$$

avec $\ell : h \mapsto h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$ linéaire. Donc f est différentiable en a, et :

$$\mathrm{d}f(a) : h \mapsto h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$$

2. Montrons que $a \mapsto \mathrm{d}f(a)$ est continue sur U.
   On a obtenu ci-dessus :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}f : & U & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ & a & \mapsto & \ell_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \ell_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) \end{array}$$

où $\begin{array}{rccl} \ell_k : & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x_k \end{array}$ associe à un vecteur sa k-ième coordonnée dans $\mathcal{B}$. La continuité sur U des $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ justifie donc celle de $\mathrm{d}f$.

□

6.2 Annexe : caractérisation des fonctions de plusieurs variables qui sont constantes

Théorème.

Soit $f : E \to F$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert, avec E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. On suppose U convexe. Alors :

$$f \text{ est constante sur } u \iff \mathrm{d}f \text{ est nulle sur } U$$

Remarque. *Le résultat est encore valable si U n'est que connexe par arcs.*

Preuve.

- Si f est constante, sa différentielle est nulle.
- Supposons que $\mathrm{d}f$ soit nulle sur U. Soit $a, b \in U$. Comme U est convexe, l'arc $\begin{array}{rccl} \gamma : & [0,1] & \to & E \\ & t & \mapsto & a + t(b-a) \end{array}$ est tracé sur U et est de classe $\mathcal{C}^1$. On a donc :

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \int_0^1 \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 0\,\mathrm{d}t \text{ car } \mathrm{d}f = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a montré que f est constante sur U.

□

6.3 Annexe : espace tangent à une partie définie par une équation implicite

Théorème.

Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. On considère l'ensemble :

$$X = \{x \in U,\ g(x) = 0\}$$

Si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$, alors :

$$T_x X = \mathrm{Ker}\,\big(\mathrm{d}g(x)\big)$$

c'est un hyperplan, comme noyau d'une forme linéaire non nulle.

Preuve. Cette démonstration est hors programme, car l'inclusion $\boxed{\supset}$ n'est pas accessible avec les outils à notre disposition. On peut cependant montrer l'inclusion directe. Soit $v \in T_x X$. Alors il existe $\gamma : \,]-\varepsilon, \varepsilon[\, \to E$ un arc dérivable, à valeurs dans X, tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. Alors :

$$\forall t \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[,\ g(\gamma(t)) = 0$$

En dérivant, on a donc :

$$\forall t \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[,\ \mathrm{d}g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

et en particulier lorsque $t = 0$:

$$\mathrm{d}g(x) \cdot v = 0$$

On a montré que $v \in \mathrm{Ker}\,\big(\mathrm{d}g(x)\big)$, et donc :

$$T_x X \subset \mathrm{Ker}\,\big(\mathrm{d}g(x)\big)$$

□

Exercices et résultats classiques à connaître

Dérivées partielles en coordonnées polaire

72.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

Un calcul de différentielle

72.2

On définit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par :

$$f(M) = \mathrm{tr}(M^2)$$

Montrer que f est différentiable, et calculer sa différentielle en tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Un exemple d'équation aux dérivées partielles

72.3

Utiliser les coordonnées polaires pour résoudre :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2axy$$

Exercices du CCINP

72.4 CCINP 33.23

On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

72.5 CCINP 52.3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

72.6 CCINP 57.2

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Donner la définition de « f différentiable en $(0,0)$ ».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

72.7 CCINP 58

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.
   Soit $a \in E$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

   Donner la définition de « f différentiable en a ».
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
   Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
   On pose : $\forall x \in E$, $\|x\|_\infty = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} |x_i|$, où $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i$.
   On pose : $\forall (x,y) \in E \times E$, $\|(x,y)\| = \text{Max}(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.
   On admet que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|.\|$ est une norme sur $E \times E$.
   Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.

   (a) Prouver que $\exists C \in \mathbb{R}^+ / \forall (x,y) \in E \times E$, $|B(x,y)| \leqslant C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$.
   (b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

Exercices

72.8

On définit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$f(M) = M^3$$

Montrer que f est différentiable, et calculer sa différentielle en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

72.9

Déterminer les fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui sont solution de l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + xyf(x,y) = 0$$

Petits problèmes d'entrainement

72.10 ✍

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$, on pose :

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

(a) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en $(0, 0)$.

(b) Calculer les dérivées partielles de f en $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) Calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$.

(d) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

(e) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

72.11

Soit f définie sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \neq 1\}$ par :

$$f(x, y) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$$

(a) Montrer que U est ouvert, et que f est $\mathcal{C}^1$ sur U.

(b) Montrer que, pour tout $(x, y) \in U$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$.

(c) Donner, pour tout $(x, y) \in U$, le gradient $\operatorname{grad} f(x, y)$.

(d) En déduire les valeurs de $f(x, y)$.

72.12

On étudie l'application $f : M \mapsto M^{-1}$ définie sur l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(a) En exploitant l'égalité $(I_n + H)(I_n - H) = I_n - H^2$, établir que f est différentiable en I_n.

(b) En déduire que f est différentiable en toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et exprimer sa différentielle.

72.13

Montrer que l'application :

$$\varphi : (x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x + \mathrm{i}y)^n}{(2n)!}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

72.14

On donne : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.
On définit, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-x^2/4t}$$

et, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on définit, pour x, t réels :

$$Kf(x, t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\Gamma(x - y, t)\, \mathrm{d}y & \text{si } t > 0 \\ f(x) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que Kf est dérivable par rapport à sa première variable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que $\dfrac{\partial (Kf)}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que Kf est dérivable par rapport à sa seconde variable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

(d) Montrer que $\dfrac{\partial (Kf)}{\partial t}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

(e) Conclure que Kf est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

72.15

Déterminer les fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui sont solution de l'équation :

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

en effectuant le changement de variable $\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases}$

72.16

Une fonction $f\,:\,\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dite **homogène de degré** $\alpha \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall t > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

On suppose ici f de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) Montrer que, si f est homogène de degré α, alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

(b) Montrer la réciproque.

72.17

Soit X une partie non vide de E espace normé, et a intérieur à X. Déterminer l'espace tangent T_aX des vecteurs tangents à X en a.

72.18

Soit B la boule unité euclidienne fermée. Déterminer les vecteurs tangents à B en a, où a est un élément de la sphère unité.

72.19

Déterminer l'ensemble tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

72.20

(a) Déterminer l'espace tangent à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

(b) Déterminer l'espace tangent à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ en une matrice $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

72.21

On considère l'ensemble $X \subset \mathbb{R}^3$ d'équation $f(x,y,z) = 0$ où :

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2+3)^2 - 16(x^2+y^2)$$

(a) Y a-t-il des points de X où $\mathrm{d}f$ s'annule ?

(b) Déterminer l'espace tangent $T_{(3,0,0)}X$.

(c) Décrire l'intersection de X avec le plan d'équation $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) Comprendre que X est la surface obtenue en faisant tourner un cercle autour d'une droite contenue dans le plan du cercle. Quelle est la forme obtenue ?

72.22

On souhaite dans cet exercice déterminer la différentielle du déterminant. On note :

$$\begin{array}{rccc} \det\,: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \det(A) \end{array}$$

(a) Justifier que l'application det est différentiable, et même $\mathcal{C}^1$.

Pour une matrice A, on note a_{ij} son coefficient générique.

(b) En exploitant le développement par rapport à une ligne ou une colonne, exprimer à l'aide des cofacteurs de A les dérivées partielles $\dfrac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A)$.

(c) En déduire la différentielle de det.