721.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est **homogène de degré** $\alpha \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall t > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

(a) On suppose f homogène de degré α. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

(b) Montrer la réciproque.

721.2

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme symétrique de E.

(a) Montrer que $f : x \mapsto \langle u(x), x\rangle$ est différentiable et calculer sa différentielle en tout point de E.

(b) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} F : & E \setminus \{0_E\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} \end{array}$$

est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ et que sa différentielle vérifie, pour tout $a \in E \setminus \{0_E\}$:

$$\mathrm{d}F(a) = 0 \iff a \text{ est vecteur propre de } u$$

721.3

Mines-Ponts

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

(a) Montrer que, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$$

(b) On pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et :

$$D = \big\{\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}),\ \forall f, g \in E,\ \phi(fg) = f(0)\phi(g) + g(0)\phi(f)\big\}$$

Montrer que D est de dimension finie, et calculer sa dimension.

721.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par :

$$f(M) = \big(\operatorname{tr}(M), \operatorname{tr}(M^2), \dots, \operatorname{tr}(M^n)\big)$$

(a) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Comparer le rang de $\mathrm{d}f(M)$ et le degré du polynôme minimal de M.

(c) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est de degré n est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.