Optimisation

Cours 2

Exercices 9

Sauf mention contraire, E et F designent des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

1 Optimisation : étude au premier ordre

1.1 Extremums d'une fonction numérique

Définition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, définie sur une partie U de E.

- Pour $a \in U$, on dit que f **atteint un maximum global en** a lorsque :

$$\forall x \in U,\ f(x) \leqslant f(a)$$

- Pour a intérieur à U, on dit que f **atteint un maximum (local) en** a s'il existe un voisinage V de a dans U tel que :

$$\forall x \in V,\ f(x) \leqslant f(a)$$

- On définit de façon analogue **minimum global** et **minimum local**.

Remarque. *Sans autre précision, un extremum est un extremum local.*

Définition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, différentiable sur U ouvert, et $a \in U$. On dit que a **est un point critique** lorsque $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$.

Remarque. *La différentielle de f en a est nulle si et seulement si les dérivées de f en a selon tous les vecteurs sont nulles, si et seulement si toutes les dérivées partielles (selon une base de E) de f en a sont nulles.*

1.2 Condition nécessaire du premier ordre

Théorème.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur U et $a \in U$.
Si :

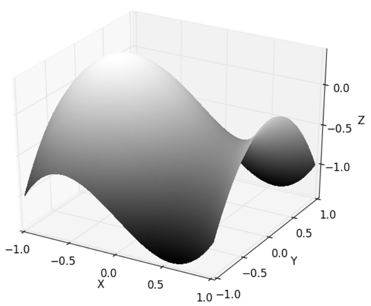
- f est différentiable sur U
- a est intérieur à U
- f admet un extremum local en a

alors :

- a est un point critique de f.

Exemple. Déterminer les points critiques de :

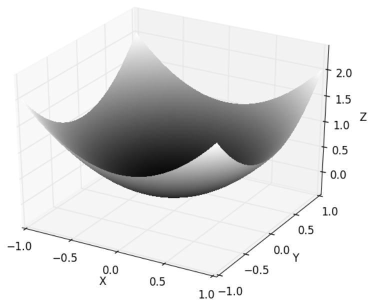
$$(x, y) \mapsto x^3 - y^2 - x$$



Exemple. Où sont les extremums de :

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$?



1.3 Optimisation sous contrainte

Présentation. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U.

Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et :

$$X = \{x \in U,\ g(x) = 0\}$$

L'équation $g(x) = 0$ s'appelle **une contrainte**, et on s'intéresse à la recherche des extremums de $f_{|X}$.

Exemple. Si g est affine, c'est-à-dire de la forme : $x \mapsto c + \ell(x)$ où $c \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, on parle de **contrainte linéaire**.

Lemme. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de différentiable sur U ouvert. Soit X une partie de U et $x \in X$.

Si $f_{|X}$ admet un extremum local en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ s'annule sur T_xX :

$$\forall v \text{ tangent à } X,\ \mathrm{d}f(x) \cdot v = 0$$

Théorème.

Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. On note : $X = \{x \in U,\ g(x) = 0\}$.
Si :

- $x \in X$
- $f_{|X}$ admet un extremum en x
- $\mathrm{d}g(x) \neq 0$

alors :

- $\mathrm{d}f(x)$ et $\mathrm{d}g(x)$ sont colinéaires.

Remarque. *La condition de colinéarité peut encore s'écrire :*

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{d}f(x) = \lambda \mathrm{d}g(x)$$

*Le coefficient λ s'appelle un **multiplicateur de Lagrange** associé à la contrainte $g(x) = 0$.*

Proposition. Dans le cas où E est euclidien, par exemple lorsque $E = \mathbb{R}^n$, la conclusion du théorème s'écrit :

$$\nabla f(x) \text{ et } \nabla g(x) \text{ sont colinéaires}$$

ou encore, puisque $\nabla g(x) \perp T_xX$:

$$\nabla f(x) \in \big(T_xX\big)^\perp$$

Exemple. Déterminer le maximum de $f : (x, y) \mapsto xy$ sur Γ d'équation $x^3 + y^3 = 1$.

2 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

2.1 Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$

Définition. Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- Lorsqu'elles existent, les $\partial_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont les **dérivées partielles premières** de f.
- Lorsqu'elles existent, on définit les **dérivées partielles secondes** comme dérivées partielles des dérivées partielles premières :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}(a) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a)$$
que l'on note encore $\partial_j \partial_i f(a)$ ou encore $\partial_{ij} f(a)$.
- On dit que f **est de classe** $\mathcal{C}^2$ sur U lorsque toutes ses dérivées partielles secondes existent et sont continues sur U.
- On définit par récurrence les **dérivées partielles d'ordre** k, et la **classe** $\mathcal{C}^k$.
- f **est de classe** $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k.

2.2 Théorème de Schwarz

Théorème de Schwarz.

Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur un ouvert U. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, alors pour tout i, j :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Remarque. *Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^k$, les dérivées partielles k-ièmes ne dépendent pas de l'ordre des dérivations.*

Exemple. On considère la fonction :
$$\begin{array}{rccl} p : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Qu'en déduire ?

2.3 Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$

Proposition. Une combinaison linéaire d'applications $\mathcal{C}^k$ est $\mathcal{C}^k$; une composée d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ est $\mathcal{C}^k$; une composée d'application $\mathcal{C}^k$ sur U avec un arc $\mathcal{C}^k$ à valeurs dans U est $\mathcal{C}^k$.

Proposition. L'ensemble $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

2.4 Exemples d'équations aux dérivées partielles

Remarque. *Aucun résutlat spécifique n'est à connaître. Fréquemment, on applique un changement de variable (et donc un changement de fonction inconnue) pour se ramener à une équation plus simple, ne faisant intervenir que les dérivées partielles par rapport à une seule variable, comme par exemple :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Les fonctions solutions de cette équation sont, sur un ouvert convexe, les fonctions « constantes en x_1 », c'est-à-dire telles qu'il existe φ :

$$\forall x, y,\ f(x, y) = \varphi(y)$$

Exemple. Effectuer le changement de variable $\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$ pour résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Exemple. Résoudre sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x}f$$

en passant en coordonnées polaires.

Exemple. Pour $c \in \mathbb{R}$, poser $\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$ pour résoudre l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

3 Optimisation : étude au second ordre ordre

3.1 Matrice hessienne

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U ouvert. Pour $a \in U$, on définit la **matrice hessienne de f en a** :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Remarque. *Ainsi, pour $n = 2$:*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Proposition. Pour tout $a \in U$, $H_f(a) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

3.2 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Théorème.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U ouvert, et $a \in U$. Alors :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(a)h, h \rangle + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|^2) \\ &= f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a)\, h + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|^2) \end{aligned}$$

Remarque. *Sous forme développée avec les dérivées partielles, l'expression s'écrit :*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i + \frac{1}{2} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i h_j + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|^2)$$

On reconnaît la différentielle de f en a dans le terme linéaire. Le terme suivant s'appelle « quadratique ».

3.3 Conditions du second ordre

Théorème.

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U ouvert, et $a \in U$.
Si :

- f admet un minimum local en a

alors :

- $\nabla f(a) = 0$
- $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Remarque. *De façon équivalente, on peut conclure que les valeurs propres de $H_f(a)$ sont $\geqslant 0$.*

Remarque. *On peut adapter le résultat dans le cas d'un maximum : les valeurs propres de $H_f(a)$ sont $\leqslant 0$.*

Théorème.

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U ouvert, et $a \in U$.
Si :

- a est un point critique de f
- $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

alors :

- f admet un minimum local strict en a

Remarque. *De façon équivalente, on peut supposer que les valeurs propres de $H_f(a)$ sont > 0.*

Remarque. *On peut adapter le résultat dans le cas d'un maximum : les valeurs propres de $H_f(a)$ sont < 0.*

Corollaire. Dans le cas où $n = 2$, on note :

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

où $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

On suppose que a est un point critique : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 > 0$ et $\operatorname{tr} H_f(a) = r + t > 0$, alors $H_f(a) \in \mathbb{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
  donc f présente un minimum local strict en a.
- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 > 0$ et $\operatorname{tr} H_f(a) = r + t < 0$, alors $-H_f(a) \in \mathbb{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
  donc f présente un maximum local strict en a.
- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 < 0$, f présente un point col en a.
- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire.

4 Annexes

4.1 Annexe : théorème de Schwarz

On se place dans le cas particulier des fonctions numériques de deux variables.

Théorème de Schwarz.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie et $\mathcal{C}^2$ sur U ouvert. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Preuve. Soit $a = (x_0, y_0) \in U$. Pour $h, k > 0$ et assez petits pour que $[x_0, x_0 + h] \times [y_0, y_0 + k] \subset U$, on pose :

$$\begin{aligned}
\delta(h,k) &= \Big(f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)\Big) \\
&\quad - \Big(\underbrace{f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)}_{\text{noté } \varphi(x_0)}\Big) \\
&= \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) \text{ à } k \text{ fixé} \\
&= h\varphi'(x_0 + \theta_1 h) \text{ où } \theta_1 \in]0,1[\\
&\qquad \text{par l'égalité des accroissements finis, } \varphi\ \mathcal{C}^1 \\
&= h\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0)}_{\text{noté } \psi(y_0)}\Big) \\
&= h\Big(\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)\Big) \text{ à } h \text{ fixé} \\
&= h\Big(k\,\psi'(y_0 + \theta_2 k)\Big) \text{ où } \theta_2 \in]0,1[\\
&\qquad \text{par l'égalité des accroissements finis, } \psi\ \mathcal{C}^1 \\
&= hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)
\end{aligned}$$

Par continuité de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, on a donc :

$$\frac{1}{hk}\delta(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

De façon symétrique :

$$\begin{aligned}
\delta(h,k) &= \Big(f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)\Big) \\
&\quad - \Big(\underbrace{f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0)}_{\text{noté } \phi(y_0)}\Big) \\
&= k\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0 + \theta_3 k) - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_3 k)}_{\text{noté } \Psi(x_0)}\Big) \\
&\qquad \text{où } \theta_3 \in]0,1[\text{ par accroissements finis} \\
&= k\Big(h\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)\Big) \\
&\qquad \text{où } \theta_4 \in]0,1[\text{ par accroissements finis}
\end{aligned}$$

Par continuité de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, on a donc :

$$\frac{1}{hk}\delta(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

On conclut alors, par unicité de la limite :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

□

4.2 Annexe : formule de Taylor-Young à l'ordre 2

On se place dans le cas où $n = 2$.

Théorème.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U ouvert, et $a \in U$. Alors :

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\
&\quad + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\Big) + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|^2)
\end{aligned}$$

Preuve. Fixons $a \in U$, et h au voisinage de 0, suffisamment petit pour que $B(a, 2\|h\|) \subset U$. On définit :

$$\varphi : t \mapsto f(a + th)$$

et on a :

$$f(a+h) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0)$$

Par composition, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et :

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \mathrm{d}f(a+th)\cdot h \\
&= h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a+th) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a+th)
\end{aligned}$$

On peut dériver à nouveau, car $t \mapsto \partial_i f(a+th)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(a+th)\Big) &= h_1\frac{\partial\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)}{\partial x}(a+th) + h_2\frac{\partial\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)}{\partial y}(a+th) \\
&= h_1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th) + h_2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+th) \\
\text{et } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(a+th)\Big) &= h_1\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th) + h_2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th)
\end{aligned}$$

On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= h_1\left(h_1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th) + h_2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+th)\right) \\
&\quad + h_2\left(h_1\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th) + h_2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th)\right) \\
&= h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th) + 2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+th) \\
&\quad + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th) \text{ par le th. de Schwarz}
\end{aligned}$$

On peut appliquer à φ la formule de Taylor avec reste-intégral :

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \varphi(0) + (1-0)\varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(0)\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \int_0^1 (1-t)\big(\varphi''(t) - \varphi''(0)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \int_0^1 (1-t)\big(\varphi''(t) - \varphi''(0)\big)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

ce qui s'écrit, en utilisant les expressions de φ à l'aide de f :

$$\begin{aligned}f(a+h) &= f(a) + \Big(h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)\Big) \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a) + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\Big) + R_a(h)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}R_a(h) = \int_0^1 (1-t)\Big(\quad & h_1^2\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\big) \\ & + 2h_1h_2\big(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a+th) - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a)\big) \\ & + h_2^2\big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\big) \quad \Big)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de montrer que $R_a(h) = \underset{h\to 0}{o}(\|h\|^2)$. On revient pour cela à la définition. Fixons $\varepsilon > 0$. Par continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ appliqué à 2ε, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\|u-a\| \leqslant \eta \implies \begin{cases} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\right| \leqslant 2\varepsilon \\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u) - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a)\right| \leqslant 2\varepsilon \\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right| \leqslant 2\varepsilon \end{cases}$$

Lorsque $\|h\| \leqslant \eta$, pour tout $t \in [0,1]$, $\|(a+th)-a\| = t\|h\| \leqslant \eta$, et donc :

$$\begin{aligned}|R_a(h)| &\leqslant 2\varepsilon\int_0^1 (1-t)\big(h_1^2 + 2|h_1||h_2| + h_2^2\big)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\varepsilon\int_0^1 (1-t)(|h_1|+|h_2|)^2\,\mathrm{d}t \\ &= 2\varepsilon\|h\|_1^2\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \varepsilon\|h\|_1^2\end{aligned}$$

On a montré que $R_a(h) = \underset{h\to 0}{o}(\|h\|_1^2)$. Les normes étant toutes équivalentes sur $\mathbb{R}^2$, le choix de $\|\cdot\|_1$ n'est pas restrictif. $\square$

Exercices et résultats classiques à connaître

Une fonction qui n'est pas $\mathcal{C}^2$

73.1

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

(a) Prolonger f par continuité en $(0,0)$.

(b) Montrer l'existence et comparer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Une fonction harmonique

73.2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe, de rayon de convergence $R > 0$. On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 < R\}$ et on définit sur D la fonction f par :

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + \mathrm{i}y)^n$$

Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur D, et qu'elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in D,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Une recherche d'extremum sur un ouvert

73.3

Déterminer les extremums locaux de :

$$f\ :\ (x,y) \mapsto x^2 - 2x + 2 + \cos(y)$$

Une recherche d'extremum sur un compact

73.4

On considère $f\ :\ (x,y) \mapsto xy(1-x-y)$ définie sur :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1\}$$

(a) Justifier que f admet un maximum sur A.

(b) Montrer que ce maximum est atteint en un point intérieur à A.

(c) Déterminer la valeur de ce maximum.

Une optimisation sous contrainte

73.5

Soit Γ la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 1$. Déterminer le maximum de $f\ :\ (x,y) \mapsto xy$ sur Γ.

Exercices du CCINP

73.6 CCINP 41

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x,y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.
Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C.
2. Soit $(u,v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.
   (a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :
   $$(S)\ :\ \begin{cases} 4u & +6v & = \lambda u \\ 6u & -v & = \lambda v \end{cases}$$
   (b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$.
   En déduire les valeurs possibles de λ.
3. Déterminer les valeurs possibles de (u,v), puis donner le maximum et le minimum de f sur C.

73.7 CCINP 56

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0,1] \times [0,1]$.
   Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

Exercices

73.8

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit $g\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$g(u,v) = f(uv, u^2 + v^2)$$

(a) Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

(b) Exprimer les dérivées partielles secondes de g en fonction des dérivées partielles de f.

73.9

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et F définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$F(x,y) = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

(a) Exprimer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ à l'aide de f.

(b) Déterminer les fonctions f telles que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.

(c) Déterminer les fonctions f telles que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \dfrac{1}{x}$.

73.10

Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de :

$$f\ :\ (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$$

73.11

Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de :

$$f\ :\ (x,y) \mapsto x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y$$

73.12

Déterminer les extremums de la fonction définie par :

(a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

(b) $g(x,y) = x^3 + y^3$

(c) $h(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$

73.13

Déterminer les extremums de la fonction définie par :

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz - 4(x+y+z)$$

73.14

Déterminer les extremums de :

$$f\ :\ (x,y) \mapsto xy$$

sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

Petits problèmes d'entrainement

73.15 ✍

Justifier l'existence et déterminer le maximum global sur $K = [0,1] \times [0,1]$ de la fonction :

$$f\ :\ (x,y) \mapsto \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

73.16

Soit $f\ :\ ]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et g définie sur $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par :

$$g(x,y,z) = f\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\big)$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et :

$$\Delta g(x,y,z) = f''(\rho) + \frac{2}{\rho} f'(\rho)$$

où $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

73.17

Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de :

$$f\ :\ (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$$

73.18

Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de :

$$f\ :\ (x,y) \mapsto x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y$$

73.19

On travaille dans $\mathbb{R}^n$ euclidien muni de son produit scalaire usuel. On considère f un endomorphisme autoadjoint défini positif, $u \in \mathbb{R}^n$ et $g\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$$

(a) Calculer le gradient de g en tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Montrer que g admet un unique point critique.

(c) Montrer que g admet un minimum global.

73.20

On considère f définie sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ par :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\big(\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)\big)$$

(a) Justifier que f admet sur D un maximum et un minimum. Que vaut le minimum ?

(b) Déterminer les points critiques de f sur l'intérieur de D. Montrer qu'il existe $\theta_0 \in [-\pi,\pi]$ tel que :

$$\underset{(x,y)\in D}{\mathrm{Max}}\ f(x,y) = f(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$$

(c) Justifier rapidement que :

$$\forall t \geqslant 0,\ \operatorname{sh}(t) \geqslant t \text{ et } \sin(t) \leqslant t$$

Montrer que $\theta \mapsto f(\cos\theta, \sin\theta)$ est croissante sur $[0,\pi/2]$.

(d) Donner la valeur du maximum de f sur D.

73.21

On considère :
$$f\ :\ (x,y) \to x^2 \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

(a) Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = f(x,y)\}$. Déterminer le plan tangent à S au point $(1,1,\mathrm{e}^{-2})$.

(b) Soit $P(1,-1,3)$. Pour $Q \in S$, on note $d_P(Q)$ la distance de Q à P. Montrer que la fonction d_P admet un minimum sur S.

73.22

Déterminer les extremums de :
$$f\ :\ (x,y) \mapsto xy + z^2$$
sous la contrainte $x^2+y^2+z^2 = 9$.

73.23

Déterminer les extremums de :
$$f\ :\ (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{xy}$$
sous la contrainte $x^5+2x+y^5+2y-6=0$.

73.24

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ telle que :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

(a) Montrer qu'il existe $g\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :
$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

(b) Pour $r \in \mathbb{R}$, on pose :
$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta$$
Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et expliciter φ.

73.25

Déterminer les extremums de la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :
$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \Big(\sum_{k=1}^n x_k\Big)^2 - \sum_{k=1}^n x_k$$

73.26

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $\Delta f > 0$ sur la boule unité $B = \{x,\ \|x\| < 1\}$. Montrer que f admet un maximum sur $\overline{B}$, et qu'il est atteint sur la sphère $\overline{B} \setminus B$.

73.27

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :
$$\forall x,\ \|x\| \geqslant 1 \implies \mathrm{d}f(x)\cdot x \geqslant 0$$
Montrer que f admet un minimum global.

73.28

On considère f définie sur $[0,1]^2$ par :
$$f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leqslant y \\ y(1-x) & \text{si } y < x \end{cases}$$
Montrer que f admet un maximum atteint en un unique point que l'on précisera.

73.29

Soit $U =]0,1[^n$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, et h définie sur U par :
$$h(x_1,\dots,x_n) = -\sum_{k=1}^n x_k \ln(x_k)$$

(a) Calculer en tout point $x \in U$ le gradient $\operatorname{grad} h(x)$ et la hessienne $H_h(x)$.

(b) Montrer que h admet un unique extremum sous la contrainte $x_1+\dots+x_n = 1$.