

Dénombrement

Cours	2
1 Ensembles finis	2
1.1 Définition	2
1.2 Propriétés	2
1.3 Exemples de cardinaux	2
2 Dénombrement d'applications, de parties d'un ensemble	2
2.1 Nombre d'applications	2
2.2 Nombre de parties d'un ensemble	3
2.3 Fonction indicatrice	3
3 Listes, nombre d'injections	3
4 Combinaisons	3
Exercices	4
Exercices et résultats classiques à connaître	4
Nombre de parties	4
Exercices du CCINP	5
Exercices	5
Petits problèmes d'entraînement	5

1 Ensembles finis

1.1 Définition

Définition. On dit qu'un ensemble E est **fini** lorsqu'il est vide, ou qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $\{1, \dots, n\}$.

Dans le premier cas, on définit $\text{Card}(E) = 0$. Dans le second cas, n est unique et on définit $\text{Card}(E) = n$.

1.2 Propriétés

Proposition. Deux ensembles finis ont le même cardinal si et seulement s'il existe une bijection entre ces ensembles.

Proposition. Soit E un ensemble fini, et $A \subset E$. Alors :

- A est fini et $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$
- $A = E \iff \text{Card } A = \text{Card } E$.

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal, et $\varphi : E \rightarrow F$. Alors :

$$\varphi \text{ bijective} \iff \varphi \text{ injective} \iff \varphi \text{ surjective}$$

1.3 Exemples de cardinaux

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \text{Card}(F)$$

Corollaire. Si E_1, E_2, \dots, E_p sont des ensembles finis, alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est fini et :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{Card}(E_1) \text{Card}(E_2) \dots \text{Card}(E_p)$$

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ est fini et :

- si l'union est disjointe, $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$;
- en général, $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$.

Corollaire. Si E_1, E_2, \dots, E_p sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p$ est fini et :

$$\text{Card}(\cup_{i=1}^p E_i) = \sum_{i=1}^p \text{Card}(E_i)$$

2 Dénombrement d'applications, de parties d'un ensemble

2.1 Nombre d'applications

Théorème.

Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n . On note $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ l'ensemble des applications : $E \rightarrow F$.

Alors F^E est fini et :

$$\text{Card}(F^E) = p^n = \text{Card}(F)^{\text{Card } E}$$

2.2 Nombre de parties d'un ensemble

Théorème.

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Alors l'ensemble de ses parties, $\mathcal{P}(E)$, est fini, et :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n = 2^{\text{Card}(E)}$$

2.3 Fonction indicatrice

Définition. Soit E un ensemble et A une partie de E . On appelle **fonction indicatrice de A** (ou parfois fonction caractéristique de A) l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition. L'application : $\mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E$ est une bijection.
 $A \mapsto \mathbb{1}_A$

3 Listes, nombre d'injections

Définition. Soit E un ensemble. On appelle **p -liste d'éléments distincts de E** tout p -uplet (x_1, \dots, x_p) d'éléments de E deux à deux distincts.

Proposition. Si $\text{Card}(E) = n$ et $p \leq n$, le nombre de p -listes d'éléments distincts de E est :

$$n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis, de cardinaux respectifs p et n . Le nombre d'applications injectives $E \rightarrow F$ est :

$$n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Corollaire. Si E est un ensemble fini de cardinal n , alors :

$$\text{Card}(\mathfrak{S}(E)) = n!$$

où $\mathfrak{S}(E)$ désigne l'ensemble des permutations de E , c'est-à-dire les bijections : $E \rightarrow E$.

4 Combinaisons

Définition. Soit E un ensemble. On appelle **p -combinaison** une partie de E à p éléments.

Définition. Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on appelle **p parmi n** et on note $\binom{n}{p}$ le nombre de p -combinaisons d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire le nombre de parties à p éléments.

Proposition. Lorsque $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Remarque. Il est maladroit de systématiquement remplacer un coefficient binomial par son expression factorielle.

Proposition.

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- Pour $p > n$ ou $p < 0$, $\binom{n}{p} = 0$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ (formule de Pascal)
- $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$ pour $n, p \geq 1$
- $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$

Exercices et résultats classiques à connaître

Nombre de parties

81.1

- (a) Justifier que $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$.
- (b) Justifier que $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}$ en commençant par remarquer que $\binom{n}{p}^2 = \binom{n}{p} \binom{n}{n-p}$.

Exercices du CCINP

81.2

 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

- Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
- Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
- Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercices

81.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

81.4

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

81.5

On appelle **main** d'un joueur cinq cartes issues d'un jeu de 32 cartes.

- Combien y a-t-il de mains différentes ?
- Combien comportent exactement un as ?
- Combien comportent au moins un as ?
- Combien comportent exactement un as et un cœur ?
- Combien comportent au moins un as ou un cœur ?
- Combien comportent au moins un as et au moins un cœur ?

Petits problèmes d'entraînement

81.6

Pour E ensemble, on appelle **recouvrement** de E tout couple (A, B) tel que $A \cup B = E$. On note R_n le nombre de recouvrements d'un ensemble à n éléments.

- Que valent R_0 et R_1 ?
- Soit E un ensemble de cardinal n .
 - Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et A une partie de E à k éléments, combien y a-t-il de parties B telles que $A \cup B = E$?
 - En déduire R_n sous la forme d'une somme, puis simplifier cette somme.

81.7

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $n \in \{0, \dots, p+q\}$.

- Montrer que $\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$.
- En déduire que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

81.8

Lorsque l'on énumère, en binaire, tous les entiers de 1 à 1024, combien de fois utilise-t-on le chiffre 1 ?

81.9

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble de cardinal n .

- Combien y a-t-il de lois de composition interne sur E ?
- Combien y a-t-il de lois de composition interne sur E admettant un élément neutre ?