Dénombrement

Cours

1 Ensembles finis

1.1 Définition

Définition. On dit qu'un ensemble E est **fini** lorsqu'il est vide, ou qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $\{1, \dots, n\}$.
Dans le premier cas, on définit $\mathrm{Card}(E) = 0$. Dans le second cas, n est unique et on définit $\mathrm{Card}(E) = n$.

1.2 Propriétés

Proposition. Deux ensembles finis ont le même cardinal si et seulement s'il existe une bijection entre ces ensembles.

Proposition. Soit E un ensemble fini, et $A \subset E$. Alors :

- A est fini et $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$
- $A = E \iff \mathrm{Card}\, A = \mathrm{Card}\, E$.

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal, et $\varphi : E \to F$. Alors :

$$\varphi \text{ bijective} \iff \varphi \text{ injective} \iff \varphi \text{ surjective}$$

1.3 Exemples de cardinaux

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E)\,\mathrm{Card}(F)$$

Corollaire. Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des ensembles finis, alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \mathrm{Card}(E_1)\,\mathrm{Card}(E_2) \dots \mathrm{Card}(E_p)$$

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ est fini et :

- si l'union est disjointe, $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F)$;
- en général, $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$.

Corollaire. Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_p$ est fini et :

$$\mathrm{Card}\left(\cup_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Card}(E_i)$$

2 Dénombrement d'applications, de parties d'un ensemble

2.1 Nombre d'applications

Théorème.

Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. On note $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ l'ensemble des applications : $E \to F$.
Alors F^E est fini et :

$$\mathrm{Card}(F^E) = p^n = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}\, E}$$

2.2 Nombre de parties d'un ensemble

Théorème.

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors l'ensemble de ses parties, $\mathcal{P}(E)$, est fini, et :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n = 2^{\mathrm{Card}(E)}$$

2.3 Fonction indicatrice

Définition. Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice de** A (ou parfois fonction caractéristique de A) l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & E & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Proposition. L'application : $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \{0,1\}^E \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est une bijection.

3 Listes, nombre d'injections

Définition. Soit E un ensemble. On appelle **p-liste d'éléments distincts de** E tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E deux à deux distincts.

Proposition. Si $\mathrm{Card}(E) = n$ et $p \leqslant n$, le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis, de cardinaux respectifs p et n. Le nombre d'applications injectives $E \to F$ est :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Corollaire. Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors :

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{S}(E)) = n!$$

où $\mathfrak{S}(E)$ désigne l'ensemble des permutations de E, c'est-à-dire les bijections : $E \to E$.

4 Combinaisons

Définition. Soit E un ensemble. On appelle **p-combinaison** une partie de E à p éléments.

Définition. Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on appelle p **parmi** n et on note $\binom{n}{p}$ le nombre de p-combinaisons d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire le nombre de parties à p éléments.

Proposition. Lorsque $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Remarque. *Il est maladroit de systématiquement remplacer un coefficient binomial par son expression factorielle.*

Proposition.

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- Pour $p > n$ ou $p < 0$, $\binom{n}{p} = 0$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ *(formule de Pascal)*
- $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour $n, p \geqslant 1$
- $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

Exercices et résultats classiques à connaître

Nombre de parties

81.1

(a) Justifier que $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

(b) Justifier que $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}$ en commençant par remarquer que $\binom{n}{p}^2 = \binom{n}{p}\binom{n}{n-p}$.

Exercices du CCINP

81.2 CCINP 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercices

81.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

81.4

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

81.5

On appelle **main** d'un joueur cinq cartes issues d'un jeu de 32 cartes.

(a) Combien y a-t-il de mains différentes ?

(b) Combien comportent exactement un as ?

(c) Combien comportent au moins un as ?

(d) Combien comportent exactement un as et un cœur ?

(e) Combien comportent au moins un as ou un cœur ?

(f) Combien comportent au moins un as et au moins un cœur ?

Petits problèmes d'entrainement

81.6

Pour E ensemble, on appelle **recouvrement** de E tout couple (A, B) tel que $A \cup B = E$. On note R_n le nombre de recouvrements d'un ensemble à n éléments.

(a) Que valent R_0 et R_1 ?

(b) Soit E un ensemble de cardinal n.

  b1. Pour $k \in [\![0, n]\!]$ et A une partie de E à k éléments, combien y a-t-il de parties B telles que $A \cup B = E$?

  b2. En déduire R_n sous la forme d'une somme, puis simplifier cette somme.

81.7

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $n \in \{0, \ldots, p+q\}$.

(a) Montrer que $\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$.

(b) En déduire que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

81.8

Lorsque l'on énumère, en binaire, tous les entiers de 1 à 1024, combien de fois utilise-t-on le chiffre 1 ?

81.9

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble de cardinal n.

(a) Combien y a-t-il de lois de composition interne sur E ?

(b) Combien y a-t-il de lois de composition interne commutatives sur E ?

(c) Combien y a-t-il de lois de composition interne sur E admettant un élément neutre ?

81.10

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \neq 0$, et $E = [\![1, n]\!]$.

(a) Dénombrer les suites $(x_1, \ldots, x_p)$ strictement croissantes d'éléments de E.

(b) Dénombrer les suites $(x_1, \ldots, x_p)$ croissantes d'éléments de E.

81.11

On appelle **partition** d'un ensemble E tout ensemble constitué de parties de E, deux à deux disjointes, non vides, et dont la réunion est E. On note B_n le nombre de partitions d'un ensemble fini à n éléments, et on pose $B_0 = 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

81.12

Soit E et F deux ensembles finis non vides, de cardinaux respectifs p et n. On note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de E dans F.

(a) Déterminer $S_{p,1}$, $S_{n,n}$ et $S_{p,n}$ lorsque $p < n$.

(b) On suppose $p > 1$ et $n > 1$. On choisit $a \in E$. En étudiant la restriction à $E \setminus \{a\}$ d'une surjection, établir :

$$S_{p,n} = n\big(S_{p-1,n} + S_{p-1,n-1}\big)$$

(c) En déduire que, pour tout $n, p \geqslant 1$:

$$S_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

81.13

Soit E un ensemble fini. On appelle **dérangement** de E toute permutation σ de E vérifiant $\sigma(x) \neq x$ pour tout $x \in E$. On note D_n le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments.

(a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$: $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$.

(b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$: $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

(c) Conclure que, pour tout $n \geqslant 1$: $D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.