Espaces probabilisés

Cours

1 Espaces probabilisables, espaces probabilisés

1.1 Tribu, espace probabilisable

Définition. Soit Ω un ensemble. On appelle **tribu** sur Ω tout $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

- $\varnothing \in \mathscr{A}$
- $\mathscr{A}$ est stable par passage au contraire : $A \in \mathscr{A} \implies \overline{A} \in \mathscr{A}$
- $\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Remarque. *$\mathscr{A}$ est bien une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, donc ses éléments sont des parties de Ω.*

Remarque. *On dit parfois que $\mathscr{A}$ est une σ-algèbre.*

Proposition. Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. Alors :

- $\Omega \in \mathscr{A}$
- $\mathscr{A}$ est stable par intersection dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ est stable par union ou intersection finie.

Exemple.

- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω, appelée parfois la **tribu discrète**
- $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu sur Ω, appelée parfois la **tribu grossière**
- Pour $A \subset \Omega$, $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu, parfois appelée la **tribu engendrée par** A

Définition. Lorsque $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, on dit que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un **espace probabilisable**. Ω s'appelle **l'univers**, et les éléments de $\mathscr{A}$, qui sont des parties de Ω, s'appellent les **événements**. Retenons que les événements sont donc des **collections d'épreuves**.

Vocabulaire.

- Pour A événement, $\overline{A}$ est l'événement contraire.
- Pour A, B événements, $A \cap B$ est l'événement « A et B »
- Pour A, B événements, $A \cup B$ est l'événement « A ou B »
- Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les événements sont **disjoints** ou incompatibles.
- $\varnothing$ est l'événement impossible, Ω est l'événement certain.

Vocabulaire.

- Un élément de l'univers $\omega \in \Omega$ est une **épreuve** ou **réalisation de l'expérience aléatoire**
- Pour A événement, $\omega \in A$ signifie que ω **réalise** A
- Si A et B sont des événements, $A \subset B$ signifie que la réalisation de A implique la réalisation de B.

Définition. Une famille $(A_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable d'événements est un **système complet** d'événements si les événements sont deux à deux disjoints, et l'union certaine :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$$

1.2 Probabilité, espace probabilisé

Définition. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $P : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ telle que :

- P est à valeurs dans $[0, 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- P satisfait la propriété de σ-additivité, i.e. si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints, alors :
$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Proposition. On a aussi les propriétés suivantes :

- $P(\varnothing) = 0$
- Pour A, B événements disjoints, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Pour $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ famille finie d'événements deux à deux disjoints,
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Définition. Lorsque P est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, on dit que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un **espace probabilisé**.

1.3 Cas très simple : probabilité sur un univers fini

Si Ω est fini, on prend $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, et on simplifie la propriété de σ-additivité en :

Si A et B sont deux événements disjoints, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Notant $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, les événements $\{\omega_i\}$ s'appellent **événements élémentaires**, et la donnée des $P(\{\omega_i\})$ (notée plutôt $P(\omega_i)$) définit P, en posant pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\omega)$.

Exemple. Avec $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la probabilité uniforme, calculer $P(A)$ où A est l'événement des épreuves paires.

Exemple. Lorsque l'on joue au jeu de l'oie, on lance simultanément deux dés équilibrés à six faces.

- Un univers naturel pour représenter les épreuves possibles :
⚀⚀ ⚀⚁ ⚀⚂ ... ⚂⚅ ⚃⚀ ⚃⚁ ... ⚃⚅ ⚄⚅ ⚅⚅
est :
$$\Omega = [\![1, 6]\!]^2$$
que l'on munit de la probabilité uniforme.
- « Faire un double-six » est un événement élémentaire, représenté par le singleton $\{(6, 6)\}$.
- « Faire au moins 10 » est un événement, représenté dans Ω par le sous-ensemble :
$$B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$
- Mais au jeu de l'oie, plutôt que ω, c'est le *nombre* somme des valeurs obtenues avec les deux dés qui nous intéresse. On note X la v.a. de la somme des valeurs obtenues. On a alors :
$$X\big((6, 6)\big) = 12 \text{ et } B = (X \geqslant 10)$$

Rappel. Pour Ω fini de cardinal N, la **probabilité uniforme** est l'unique probabilité telle que :
$$\forall \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = \frac{1}{N}$$
et alors, pour tout événement A :
$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

1.4 Cas simple : probabilité sur un univers dénombrable

Si Ω est dénombrable, on prend aussi $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Notant $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$, les événements $\{\omega_i\}$ s'appellent **événements élémentaires**, et la donnée d'une famille $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels positifs sommable et de somme 1 permet de définir une unique probabilité P telle que $P(\{\omega_i\}) = p_i$ pour tout i. On a encore, pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$.

Exemple. Avec $\Omega = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) = \frac{1}{2^n}$, calculer $P(A)$ où A est l'événement des épreuves paires.

1.5 Exemple d'un univers non dénombrable : le jeu de pile ou face

Exemple. Prenons l'exemple de $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$, qui n'est pas dénombrable. Il modélise l'expérience consistant à tirer une infinité de fois à pile ou face.

- Pour mieux comprendre, il est conseillé de « mimer » quelques réalisations de l'expérience aléatoire :

$$\begin{aligned}
&\omega^1 = FPFPPFPFFPPFPFFP\dots \\
&\omega^2 = FFPFFPFPPFPFFPPF\dots \\
&\omega^3 = FFFFFFFFFFFFFFFF\dots && \text{uniquement des faces} \\
&\omega^4 = PFPFPFPFPFPFPFPF\dots && \text{alternance parfaite pile/face}
\end{aligned}$$

- On admet qu'il n'est pas possible de choisir pour tribu l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$, qui est trop gros, ce qui obligera à définir une probabilité nulle pour chaque événément élémentaire.

- Définissons :

$$P_k = \{\omega \in \{P, F\}^{\mathbb{N}^*},\ \omega_k = P\} = \text{« le } k\text{-ième lancer a donné pile »}$$
$$F_k = \overline{P_k} = \{\omega \in \{P, F\}^{\mathbb{N}^*},\ \omega_k = F\} = \text{« le } k\text{-ième lancer a donné face »}$$

  que l'on appellera entre nous **événements primitifs**.

- Par exemple

$$P_3 = \text{« le troisième lancer a donné pile »}$$

  Cet événement est réalisé par ω^2 et ω^4, mais pas par ω^1 ni ω^3.

- On admet que l'on peut définir une tribu $\mathscr{A}$ contenant les événements primitifs. Celle-ci contient donc aussi les événements obtenus par unions et intersections au plus dénombrables d'événements primitifs.

- Par exemple, on définit des événements en posant :

$$E_1 = F_1 \cap P_2 \cap F_3,\ E_2 = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k,\ E_3 = P_3 \cap F_3$$

  On peut alors se demander si les épreuves précédentes réalisent ou non ces événements.

- Une façon de comprendre l'événement P_2 est d'écrire :

$$P_2 = \{\star P \star\star\star\star\star\star\dots\} \subset \Omega$$

- On note X le rang d'apparition du premier pile : c'est une v.a. avec $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et :

$$X(\omega^1) = 2,\ X(\omega^2) = 3,\ X(\omega^3) = +\infty \text{ et } X(\omega^4) = 1$$

  L'épreuve ω^2 réalise l'événement $(X = 3)$, et $(X = 3) = F_1 \cap F_2 \cap P_3$.

- Fixons $p \in]0, 1[$. Il existe une probabilité P définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ par :

$$P(P_k) = p,\ P(F_k) = 1 - p,$$

  et ce qui sera plus tard l'indépendance de P_i et P_j pour $i \neq j$, de sorte que, par exemple :

$$P(E_1) = (1 - p)p(1 - p) = p(1 - p)^2$$

1.6 Espaces probabilisés discrets

Définition. Soit Ω un ensemble. Une **distribution de probabilités discrètes** sur Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega in \Omega}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$, indexée par Ω, et de somme 1.
Le **support** de cette distribution de probabilité est l'ensemble des ω tels que $p_\omega > 0$.

Proposition. Le support d'une distribution de probabilités discrète est au plus dénombrable.

Définition. Soit Ω un ensemble, et $(p_\omega)_{\omega in \Omega}$ une distribution de probabilités discrètes. On peut munir Ω de la tribu $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité définie sur les événements élémentaires par $P(\omega) = p_\omega$.

2 Propriétés des probabilités

Dans toute la suite du chapitre, on considère $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

2.1 Croissance

Proposition. Pour A et B deux événements, si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$.

2.2 Des réunions

Proposition.

- Soit $(A_n)_n$ est une suite d'événements deux à deux disjoints, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.
- Soit $(A_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ est une famille finie d'événements deux à deux disjoints, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \sum_{n=0}^{N} P(A_n)$.

Proposition. Soit A et B deux événements. Alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Théorème de continuité croissante.

Soit $(A_n)_n$ une suite croissante (pour l'inclusion) d'événements, i.e. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n. Alors :

$$P(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Corollaire. Soit $(A_n)_n$ une suite quelconque d'événements. Alors :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Remarque. *C'est ce théorème auquel on fera référence lorsque l'on a envie de parler d'événement-limite.*

Proposition (sous-additivité). Soit $(A_n)_n$ une suite quelconque d'événements.
Alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(A_n\right)$$

Remarque. *On ne perdra pas de vue que l'inégalité* $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant 1$ *reste vraie, et parfois meilleure que l'inégalité précédente.*

2.3 Continuité décroissante

Théorème de continuité décroissante.

Soit $(A_n)_n$ une suite décroissante (pour l'inclusion) d'événements, i.e. $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n. Alors :

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Corollaire. Soit $(A_n)_n$ une suite quelconque d'événements. Alors :

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Remarque. *C'est ce théorème auquel on fera référence lorsque l'on a envie de parler d'événement-limite.*

3 Négligeabilité

Définition. On dit qu'un événement A est **négligeable** lorsque $P(A) = 0$.

Remarque. *L'événement impossible $\varnothing$ est négligeable, mais un événement négligeable n'est pas, en général, impossible.*

Exemple. Dans le jeu de pile ou face infini :

- Montrer que l'événement « n'obtenir que des piles » est négligeable.
- Que penser de l'événement « obtenir un nombre fini de face » ?

Proposition. Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Définition. On dit qu'un événement A est **presque sûr** lorsque $P(A) = 1$.

Remarque. *L'événement certain Ω est presque sûr, mais un événement presque sûr n'est pas, en général, certain.*

Proposition. A est presque sûr si et seulement si $\overline{A}$ est négligeable.

Proposition. Une intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.

Définition. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements. On dit que c'est un **système quasi-complet** d'événements lorsque les A_i sont deux à deux disjoints, et de reunion presque sûre :

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$$

4 Conditionnement, indépendance

4.1 Probabilité conditionnelle

Définition. Soit B un événement non négligeable. Pour tout événement A, on appelle **probabilité de** A **sachant** B :

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Remarque. *On utilise aussi la notation $P_B(A)$, **probabilité sachant** B **de** A.*

Proposition. P_B est une (autre) probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

4.2 Probabilités composées

Probabilités composées.

Pour deux événements A et B tels que $P(B) > 0$, on a :

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B)$$

Plus généralement, si $A_1, \dots, A_m$ sont des événements tels que $P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) > 0$, on a :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) &= P(A_m \mid A_{m-1} \cap \dots \cap A_2 \cap A_1) \dots P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_1) \\ &= \prod_{i=1}^{m} P\Big(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\Big) \end{aligned}$$

Exemple. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire successivement et sans remise n boules de cette urne. Déterminer la probabilité qu'au moins une boule rouge figure dans ce tirage.

4.3 Probabilités totales

Probabilités totales.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet ou quasi-complet d'événements, avec I fini ou dénombrable.
Pour tout événement B :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i) P(A_i)$$

Remarque.

- *On adopte la convention (raisonnable) que $P(B|A_i)P(A_i) = 0$ lorsque $P(A_i) = 0$.*
- *On précisera toujours le système complet ou quasi-complet d'événements utilisé pour appliquer ce théorème.*
- *Dans le cas fréquent du système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$, la formule s'écrit :*

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$

Exemple. On dispose de six urnes numérotées de 1 à 6. L'urne numéro k comporte k boules blanches et une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré, puis choisit une boule dans l'urne correspondant au résultat du dé. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.

4.4 Formule de Bayes

Formule de Bayes.

Soit A et B deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} \qquad \text{si de plus } P(\overline{A}) \neq 0 \end{aligned}$$

Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, avec I au plus dénombrable, alors pour tout événement B de probabilité non nulle et tout i :

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{k \in I} P(B|A_k)P(A_k)}$$

en adoptant la convention $P(B|A_i)P(A_i) = 0$ si $P(A_i) = 0$.

Exemple.

1. On dispose d'un test de dépistage d'une maladie. En principe, celui-ci est positif si le patient est malade, mais le test n'est pas fiable à 100 %.
   Plus précisément, si le patient est malade alors le test est positif 99.9 fois sur 100.
   Mais 4 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade.
   On sait qu'environ 2 ‰ de la population est atteinte de la maladie.
   Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif ?
2. On dispose d'un second test de dépistage de la même maladie, moins bon que le premier. Mais on le teste maintenant sur la population qui s'est révelée positive au premier test.
   Si la personne est malade le test B est positif 97 fois sur 100. Mais 8 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade. Environ 1/3 de la population testée est atteinte de la maladie.
   Quelle est la probabilité qu'une personne testée soit malade sachant que le test B est positif ?

5 Indépendance

5.1 Indépendance de deux événements

Définition. Deux événements A et B sont dits **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Remarque. *Dans le cas où $P(B) > 0$, cela revient à dire $P(A \mid B) = P(A)$, c'est-à-dire que la réalisation de B n'influe pas sur la réalisation de A.*
Deux événements disjoints ne sont en général pas indépendants : la réalisation de l'un interdit la réalisation de l'autre.

Proposition. Si A et B sont indépendants, alors :

- A et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

5.2 Indépendance d'une famille finie d'événements

Définition. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.

- Les événements sont **deux à deux indépendants** si et seulement si, pour tout $i, j \in \{1, \dots, m\}$:
$$i \neq j \implies P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$$
- Les événements sont **indépendants** si et seulement si, pour toute partie finie non vide $J \subset I$,
$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

Remarque. *On utilise parfois l'expression « mutuellement indépendants » pour désigner l'indépendance.*
Des événements peuvent être deux à deux indépendants sans être indépendants.

Exemple. On lance deux dés discernables, et on considère les événements :

$$A = \text{« le premier dé donne un résultat pair »}$$
$$B = \text{« le second dé donne un résultat pair »}$$
$$C = \text{« la somme des résultats des deux dés est paire »}$$

Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas (mutuellement) indépendants.

Proposition. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements indépendants. Pour tout i, on définit $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.
Alors $(B_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements indépendants.

Exercices et résultats classiques à connaître

Recherche d'un motif dans une suite infinie de lancers d'une pièce

820.1

On lance une pièce avec la probabilité p de faire « Pile ». On note A_n l'événement « on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du $n^{\text{ème}}$ lancer » et l'on désire calculer sa probabilité a_n.

(a) Déterminer a_1, a_2 et a_3.

(b) Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n \geqslant 1$.

(c) Justifier qu'il est quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs.

(d) Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.

Une chaîne de Markov

820.2

On considère en première approximation que la météo à Lyon n'a que deux états : beau et gris/pluvieux. On suppose de plus que :

- s'il fait beau, il y a 80 % de chance qu'il fasse encore beau le lendemain ;
- s'il ne fait pas beau, il y a 30 % de chance que ça continue le lendemain.

On note p_n la probabilité qu'il fasse beau au n-ième jour, en supposant que l'on commence l'observation un jour de beau temps.

(a) Schématiser la situation à l'aide d'un graphe pondéré.

(b) Montrer que la suite $(p_n)_n$ est arithmético-géométrique.

(c) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau dans très longtemps ?

Démographie

820.3

On étudie une population, et on admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'une famille ait n enfants est donnée par :

$$p_n = k\frac{(2.1)^n}{n!}$$

(a) Déterminer la constante k.

(b) On suppose qu'un enfant naît avec une probabilité 0.5 d'être une fille.

  b1. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.

  b2. On suppose que, parmi les enfants d'une famille, il n'y a qu'une seule fille. Quelle est la probabilité que cette famille ait deux enfants ?

Exercices du CCINP

820.4 CCINP 101.13

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement « l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On note B_n l'événement « l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On note C_n l'événement « l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. diagonalisation de A
3. Montrer comment les résultats de la question précédente peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

820.5 CCINP 105

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

820.6 CCINP 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercices

820.7

On lance indéfiniment un dé équilibré à six faces. On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ qui permet d'étudier la succession des valeurs obtenues.

(a) Déterminer la probabilité d'obtenir ⚅ pour la première fois lors du n-ième lancer.
(b) Montrer qu'il est presque sûr d'obtenir un ⚅.
(c) Montrer qu'il est presque sûr d'obtenir une infinité de ⚅.

820.8

Une urne contient une boule blanche. Un joueur lance un dé équilibré à six faces. S'il obtient ⚅, il tire une boule dans l'urne. Sinon, il rajoute une boule rouge dans l'urne et répète l'opération. On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ permettant l'étude de cette expérience.

(a) Quelle est la probabilité que le joueur tire la boule blanche ?

(b) On suppose que le joueur a tiré la boule blanche. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'autre boule dans l'urne ?

820.9

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Écrire, avec les opérations ensemblistes ($\cup$, $\cap$ et complémentaire) les événements suivants :

(a) L'un au moins des événements A, B ou C est réalisé

(b) L'un et seulement l'un des événements A et B est réalisé

(c) Les deux événements A et B sont réalisés, et C ne l'est pas

(d) Tous les événements A_n, $n \geqslant 1$ sont réalisés

(e) L'un au moins des événements A_n, $n \geqslant 1$ est réalisé

(f) Une infinité d'événements parmi les A_n, $n \geqslant 1$ est réalisée

(g) Seul un nombre fini des événements A_n, $n \geqslant 1$ est réalisé

(h) Une infinité d'événements parmi les A_n, $n \geqslant 1$ n'est pas réalisée

(i) Tous les événements parmi les A_n, $n \geqslant 1$ sont réalisés à partir d'un certain rang

820.10

On dispose d'un trousseau de n clés indifférentiables pour ouvrir une serrure.

(a) L'expérience a lieu dans le noir et, à chaque essai, on utilise une clé choisie au hasard. Quelle est, pour tout entier non nul p, la probabilité d'ouvrir la serrure au p-ième essai ?

(b) Le lendemain, on s'est procuré une lampe de poche et on essaie successivement toutes les clés. Quelle est maintenant la probabilité d'ouvrir la serrure au p-ième essai de cette nouvelle série ?

820.11

Vous jouez à Pile ou Face dans un club de jeu dont environ un membre sur trois est un tricheur. Votre adversaire parie sur Pile, lance la pièce et obtient Pile. Quelle est la probabilité qu'il soit un tricheur ?

820.12

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire successivement des boules de cette urne. À chaque boule tirée, on note la couleur de celle-ci, et on la remet dans l'urne accompagnée d'une boule de la même couleur. Montrer qu'il est presque sûr que la boule rouge initiale sera tirée.

820.13

Une urne contient une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré. S'il obtient ⚅, il tire une boule dans l'urne. Sinon, il rajoute une boule blanche dans l'urne et répète la manipulation. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

820.14

Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité p_1 de toucher à chaque tour et le second la probabilité p_2 (avec $p_1, p_2 > 0$)

(a) Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?

(b) Montrer que le jeu se termine presque sûrement.

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?

820.15

On considère 3 cartes à jouer de même forme. Cependant, les deux faces de la première carte ont été colorées en noir, les deux faces de la deuxième carte en rouge tandis que la troisième porte une face noire et l'autre rouge. On mélange les trois cartes au fond d'un chapeau, puis une carte est tirée au hasard et placée au sol. Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

http://mpi.lamartin.fr

820.16

On cherche un objet dans un meuble qui a 8 tiroirs. La probabilité qu'il se trouve dans le meuble est p. On ouvre successivement 7 tiroirs différents sans le trouver. Quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier tiroir ?

Petits problèmes d'entrainement

820.17 ✍

La joueuse Fafa joue contre le joueur Pif avec une pièce équilibrée. On lance cette pièce. Si la séquence « FF » est observée avant la séquence « PF », alors la joueuse Fafa est vainqueur. Si c'est la séquence « PF », qui est observée en premier, alors Pif est vainqueur.

(a) Justifier que la probabilité que personne ne gagne est nulle.

(b) En considérant les résultats des deux premiers lancers, montrer que Pif a la plus grande probabilité de l'emporter.

820.18 ✍

Soit $s \in]1, +\infty[$.

(a) Pour quelle valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ existe-t-il une probabilité P sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s} \ ?$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit l'événement :

$$A_p = \{n \in \mathbb{N}^*,\ p \text{ divise } n\}$$

et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

(b) Montrer que la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille d'événements indépendants.

(c) En étudiant $P(\{1\})$, établir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

820.19

Soit B un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Montrer que l'ensemble des événements indépendants de B forment une tribu sur Ω.

820.20

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

(a) Soit A un événement, et $\overline{A}$ son contraire.
Montrer que : $P(A)P(\overline{A}) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

(b) Soit A, B deux événements.

b1. Montrer que $P(A)P(B) - P(A \cap B) = P(A)P(\overline{A} \cap B) - P(A \cap B)P(\overline{A})$.

b2. En déduire que $\left|P(A)P(B) - P(A \cap B)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$.