Variables aléatoires discrètes

Cours 2

Exercices 12

Sauf mention contraire, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé.

1 Qu'importe l'épreuve, pourvu qu'on ait le résultat !

1.1 Définition

Définition. Soit E un ensemble. Une **variable aléatoire discrète** X est une application :

$$X \,:\, \Omega \to X(\Omega) \subset E$$

telle que :

- l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est au plus dénombrable ;
- pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $(X = x)$ est un événement.

Remarque. *$(X = x)$ est l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$, image réciproque (ou tiré en arrière) de $\{x\}$ par l'application. Dire que c'est un événement, c'est dire qu'il est dans la tribu $\mathscr{A}$.*

Remarque. *Travailler avec des variables aléatoires, c'est regrouper dans un même événement les épreuves en fonction de leur image par X.*

Exemple. Lors du lancer de deux dés, on appelle X le résultat de la somme des deux faces obtenues. C'est une variable aléatoire.

Exemple. On considère Ω l'ensemble des individus actuellement présents dans la salle. On peut considerer X la taille en cm, Y l'âge en années. Ce sont deux v.a. : $(X = 181)$, $(X \geqslant 190)$, $(Y = 19)$, $(Y = 15)$ sont des événements (et on peut se demander les épreuves qui les réalisent).

Exemple. On considère le jeu du pile ou face infini. Notant X le rang d'apparition du premier pile, X est un v.a. : $(X = 3)$, $(X > 5)$ sont des événemnets.

Remarque. *Les v.a. étudiées dans le cadre de notre programme sont toutes discrètes. Elles sont souvent à valeurs numériques, voire entières, mais on manipule aussi des v.a. à valeurs vectorielles quand on manipule des couples ou des n-uplets de v.a.*

Définition.

- Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **v.a. réelle discrète**.
- Lorsque $E = \mathbb{R}^2$, on parle de **couple de v.a. réelles**.

Remarque. *En pratique, on n'explicite pas Ω ni $\mathscr{A}$. Mais la donnée d'une v.a. fournit toute une série d'événements : les $(X = x)$. En combinant ces événements par unions et intersections au plus dénombrables, et en passant au contraire, on connaît beaucoup d'éléments de la tribu.*

Proposition.

- Si A est une partie de E, $(X \in A)$ désigne $\{\omega,\ X(\omega) \in A\} = \displaystyle\bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} (X = x)$. C'est un événement comme union au plus dénombrable d'événements.
- Si X est une v.a. réelle, on définit les événements $(X \leqslant x)$, $(X > x)$ etc.

Définition. Soit A un événement. On a déjà défini la **fonction indicatrice** de A par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_A \,:\, \Omega & \to & \{0,1\} \\ \omega & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$

Proposition. La fonction indicatrice d'un événement est une variable aléatoire discrète.

1.2 Loi

Définition théorique. Soit $X : \Omega \to E$ une v.a. discrète. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit :

$$P_X(A) = P(X \in A)$$

C'est une probabilité sur l'espace probabilisable $(E, \mathcal{P}(E))$.

Remarque. *En fait, seuls les éléments de $E \cap X(\Omega)$ « comptent » ; cet ensemble est dénombrable, ce qui explique que l'on puisse choisir $\mathcal{P}(E)$ pour tribu.*

En pratique. La donnée de la loi d'un v.a. discrète X, c'est :

- la donnée de $X(\Omega)$, ensemble au plus dénombrable, parfois appelé abusivement « support » de X ;
- pour chaque $x \in X(\Omega)$, la valeur de $P(X = x)$.

On dit qu'elle est déterminée par la distribution de probabilités discrètes $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Proposition. Pour $A \subset E$ ou $A \subset X(\Omega)$, $P(X \in A) = \displaystyle\sum_{x \in A \cap X(\Omega)} P(X = x)$.

Exemple. On s'intéresse au jeu du pile ou face infini, et on note X la variable aléatoire donnant le rang du premier lancer qui donne pile. On suppose qu'à chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$, et celle d'obtenir face est $q = 1 - p$.

1. Déterminer la loi de X, appelée **loi géométrique de paramètre** p.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(X \leqslant n)$ et $P(X > n)$.

Exemple. Soit X un v.a. sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$, et telle que :

$$\forall n \geqslant 2,\ P(X = n) = \zeta(n) - 1$$

Montrer que X suit une loi de probabilité.

Notation. On note $X \sim Y$ lorsque les deux v.a. X et Y suivent la même loi.

1.3 Fonction d'une variable aléatoire discrète

Proposition. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète, et $f : E \to F$ une application quelconque. Alors la composée $f \circ X$, notée $f(X)$, est une variable aléatoire discrète.

Proposition. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Remarque. *Si X et Y sont des v.a., alors $Z = (X, Y)$ est une v.a. (un couple de v.a. est une v.a. à valeur dans un produit). Donc pour toute fonction f, $f(Z)$ est une v.a.*
Ainsi $X + Y$, XY, $\mathrm{Min}(X, Y)$, $\mathrm{Max}(X, Y)$ sont des v.a.

2 Lois usuelles

Conseil. *Il n'est pas inutile de ficher les lois usuelles.*

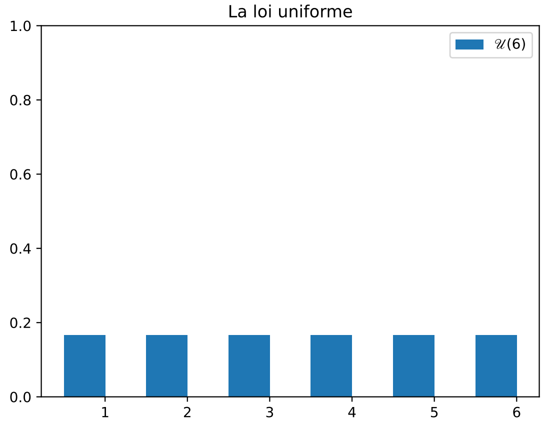
2.1 Loi uniforme

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ lorsque :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$

On note alors $X \sim \mathscr{U}([\![1, n]\!])$.

Interprétation. *C'est la loi du choix « au hasard » d'un élément dans un ensemble à n éléments.*



2.2 Loi de Bernoulli

Définition. Soit $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p lorsque :

$$X(\Omega) = \{0,1\} \quad \text{et} \quad P(X=1) = p,\ P(X=0) = 1-p$$

On note alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Exemple. Toute expérience à deux issues, comme le jeu de Pile ou Face, est naturellement modélisée par une v.a. suivant une loi de Bernoulli.

Exemple. Si A est un événement, sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$:

$$\mathbb{1}_A \sim \mathscr{B}(P(A))$$

2.3 Loi binomiale

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p lorsque :

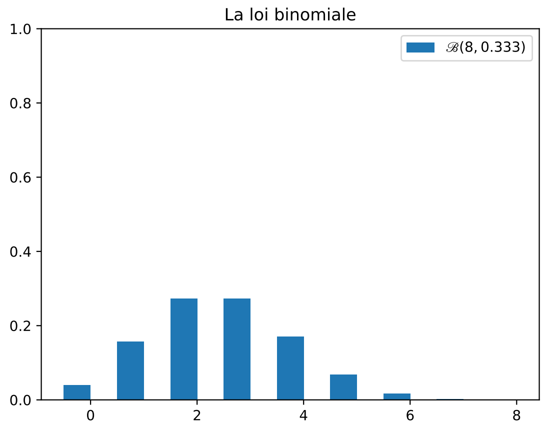
$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Interprétation. *C'est la loi du nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes, de même paramètre p.*

Proposition. Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p, alors :

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathscr{B}(n,p)$$



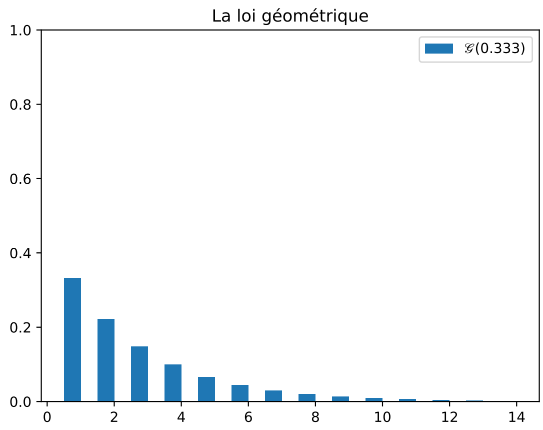
2.4 Loi géométrique

Définition. Soit $p \in]0, 1[$. Une variable aléatoire X suit une **loi géométrique** de paramètre p lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

On note alors $X \sim \mathscr{G}(p)$.

Interprétation. *C'est la loi du numéro du premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même paramètre p.*



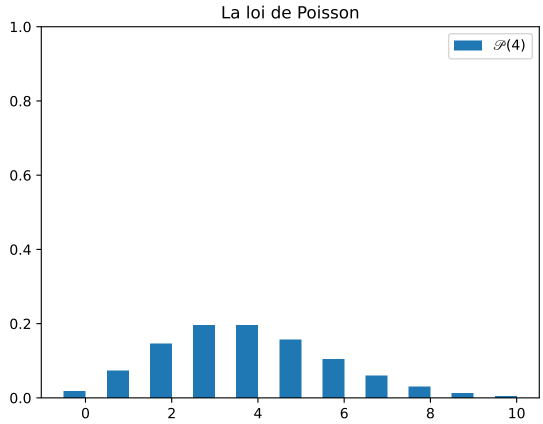
2.5 Loi de Poisson

Définition. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On note alors $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Interprétation. *On l'appelle la loi « des événements rares » : lorsqu'un événement rare arrive en moyenne λ fois sur une période T, c'est la loi du nombre de fois où cet événement se produit sur une période donnée.*



3 Couples de variables aléatoires

3.1 Loi conjointe, lois marginales

Remarque. *On a vu que si X et Y sont deux v.a. discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors $Z = (X, Y)$ est aussi une v.a. discrète. On s'intéresse aux liens entre les lois de X et Y d'une part, et de Z d'autre part. On a directement $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. En pratique, on ne cherche pas à préciser $Z(\Omega)$.*

Définition. Si X et Y sont deux v.a. à valeurs dans $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement, leur **loi conjointe** est la loi du couple (X, Y) :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P((X, Y) = (x, y)) = P((X = x) \cap (Y = y))$$

que l'on note plus simplement $P(X = x, Y = y)$.
Les **lois marginales** du couple (X, Y) sont celles de X et de Y.

Exemple.

- Un prof pose une question à deux étudiants, Antoine et Baptiste, qui n'ont pas appris leur cours. Leur réponse respective est une variable aléatoire notée A (resp. B), qui suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Dans le même contexte, Antoine a une confiance aveugle en Baptiste, et copie sa réponse (même si elle répond toujours au hasard). A et B suivent encore $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Dans le même contexte, Baptiste se méfie d'Antoine, et copie sur sa copie pour répondre l'opposé (tandis que lui répond toujours au hasard). A et B suivent encore $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Dans les trois situations précédentes, le couple (A, B) ne suit pas du tout la même loi :

$A \backslash B$	0	1	P_A
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
P_B	1/2	1/2	1

$A \backslash B$	0	1	P_A
0	1/2	0	1/2
1	0	1/2	1/2
P_B	1/2	1/2	1

$A \backslash B$	0	1	P_A
0	0	1/2	1/2
1	1/2	0	1/2
P_B	1/2	1/2	1

Remarque. *Il apparaît bien que connaître les lois marginales n'est pas suffisant pour connaître la loi conjointe.*

3.2 Détermination pratique des lois marginales

Remarque. *On peut visualiser loi conjointe et lois marginales dans un tableau (fini ou dénombrable), avec $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$ et en notant $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$:*

$X \backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	Loi de X
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$P(X=x_1)=\sum\limits_{j\in J} p_{1j}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$P(X=x_i)=\sum\limits_{j\in J} p_{ij}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
Loi de Y	$P(Y=y_1) = \sum\limits_{i\in I} p_{i1}$	$\cdots$	$P(Y=y_j) = \sum\limits_{i\in I} p_{ij}$	$\cdots$	1

Proposition. On obtient les lois marginales par σ-additivité, ou applications des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Y=y)_{y\in Y(\Omega)}$:

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=x, Y=y) \\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=x|Y=y)P(Y=y) \end{aligned}$$

et de même pour $P(Y=y)$.

3.3 Extension aux n-uplets de variables aléatoires

Définition. Soit $X_1,\dots,X_n$ des v.a. discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$, à valeurs dans $E_1,\dots,E_n$. Alors l'application :

$$X\ :\ \omega\mapsto (X_1(\omega),\dots,X_n(\omega))$$

est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E_1\times\cdots\times E_n$.
En général, les E_i sont (des parties de) $\mathbb{R}$ et X est appelé un **vecteur aléatoire** discret.

Loi conjointe. Avec les notations précédentes, la loi conjointe est la loi de X : elle est entièrement déterminée par la donnée de $X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$ et, pour $(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$, la valeur de $P(X=(x_1,\dots,x_n))=P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)$.

Proposition. Pour A partie de $E_1\times\cdots\times E_n$,

$$P(X\in A)=\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in A\cap(X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega))} P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)$$

Lois marginales. La loi de X_1, dite **loi marginale**, se déduit de la loi conjointe par *sigma*-additivité :

$$\forall x\in X_1(\Omega),\ P(X_1=x)=\sum_{(x_2,\dots,x_n)\in X_2(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)} P(X_1=x,X_2=x_2\dots,X_n=x_n)$$

et de même pour X_2, ..., X_n.

4 Indépendance de deux variables aléatoires

4.1 Lois conditionnelles

Proposition. Soit X et Y deux v.a. discrètes définies sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$, à valeurs dans E et F respectivement. Pour $y\in Y(\Omega)$ tel que $P(Y=y)>0$, on définit la **loi sachant** $(Y=y)$ **de** X par la distribution de probabilités discrètes :

$$\big(P(X=x\mid Y=y)\big)_{x\in X(\Omega)}$$

c'est-à-dire que $P_{X|(Y=y)}(X=x)=\dfrac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$.

Remarque. *On présente en annexe, page 9, un définition plus précise de la loi conditionnelle.*

4.2 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont **indépendantes** et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ si et seulement si, pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$\forall x \in X(\Omega),\, y \in Y(\Omega),\; P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$$

Remarque. *De façon équivalente, cela signifie que la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par :*

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$$

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Alors pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a :

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

Remarque. *On peut montrer que l'indépendance de X et Y est équivalente à l'égalité, pour tout $x \in X(\Omega)$, de la loi conditionnelle sachant $(X = x)$ de Y et de celle de Y, i.e. $P_{Y|(X=x)} = P_Y$.*

4.3 Indépendance d'une famille finie de variables aléatoires

Définition. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. On dit qu'elles sont (mutuellement) **indépendantes** si et seulement si pour tout $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

On peut généraliser la propriété vue pour le cas de deux variables aléatoires discrètes indépendantes :

Proposition. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes (mutuellement) indépendantes. Soit $A_1 \subset X_1(\Omega), \dots, A_n \subset X_n(\Omega)$. On a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

4.4 Indépendance d'une famille quelconque de variables aléatoires

Définition. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de v.a. discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que $(X_i)_{i \in I}$ est **indépendante** si et seulement si toute sous-famille $(X_i)_{i \in J}$, où $J \subset I$ est fini, est indépendante.

Remarque. *On peut donc quantifier la définition suivante par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i_1, \dots, i_n \in I \text{ distincts},\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in X_{i_1}(\Omega) \times \cdots \times X_{i_n}(\Omega),\ P(X_{i_1} = x_1, \dots, X_{i_n} = x_n) = P(X_{i_1} = x_1) \dots P(X_{i_n} = x$$

4.5 Opérations sur les familles de v.a. indépendantes

Théorème.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Alors, pour toutes fonctions f et g, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Remarque. *Ce résultat s'étend au cas de plus deux variables aléatoires.*

Lemme des coalitions.

> Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a.d. indépendantes.
> Alors pour toutes fonctions f et g, $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque. *Ce résultat s'étend au cas de plus deux coalitions.*

5 Existence

On admet le résultat suivant :

Théorème.

> Soit $(\mathscr{L}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités discrètes. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et une famille $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de v.a. discrètes indépendantes sur cet espace tels que, pour tout i, $X_i \sim \mathscr{L}_i$.

Définition. On appelle **variables i.i.d.** des variables **indépendantes** et **identiquement distribuées**, c'est-à-dire qui suivent toutes la même loi.
On appelle **suite i.i.d.** une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de v.a. discrètes indépendantes, et qui suivent toutes la même loi.

Exemple. Le jeu de pile ou face infini se modélise par une suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

6 Annexes

6.1 Annexe : Loi conditionnelle d'une variable X sachant un événement A

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, et $A \in \mathscr{A}$ un événement non négligeable. On a défini :

$$P_A : B \mapsto \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

qui fait de $(\Omega, \mathscr{A}, P_A)$ un nouvel espace probabilisé, avec le même univers, les mêmes événements, mais une probabilité différente.
Si X est une v.a. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans E, c'est encore une v.a. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P_A)$, mais sa loi ne sera plus la même : on l'appelle **loi sachant** A **de** X. Elle est donnée par :

$$\begin{aligned}\forall B \in \mathcal{P}(E),\ P_{X|A}(B) &= P_A(X\in B) = P(X \in B \mid A)\\ &= \frac{P((X\in B)\cap A)}{P(A)}\end{aligned}$$

C'est donc la loi d'une v.a. qui s'appelle X, mais qui n'est pas la loi de X.

Proposition. $P_{X|A}$ est une probabilité sur E.

En pratique, on conditionne par une autre v.a., donc l'événement A prend la forme $(Y = y)$, et comme $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, on se contente de définir la loi sachant $(Y = y)$ de X en donnant la distribution de probabilités discrètes $(P((X = x) \mid (Y = y)))_{x\in X(\Omega)}$, puisque, pour $A \subset E$:

$$P_{X|(Y=y)}(A) = \sum_{x\in A\cap X(\Omega)} \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

6.2 Annexe : Lois conditionnelles définies à partir d'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$

On considère un vecteur aléatoire discret $X = (X_1, \dots, X_n)$.

Une première loi conditionnelle

Si $P(X_1 = x) \neq 0$, on peut définir la loi sachant $(X_1 = x)$ de $(X_2, \dots, X_n)$ par la donnée de :

$$\begin{aligned}P_{(X_2,\dots,X_n)|(X1=x)}(\{(x_2, \dots, x_n)\}) &= P_{(X_1=x)}((X_2, \dots, X_n) = (x_2, \dots, x_n))\\ &= \frac{P(X_1 = x, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)}{P(X_1 = x)}\end{aligned}$$

et alors, pour toute partie B de $E_2 \times \dots \times E_n$:

$$\begin{aligned}P_{(X_2,\dots,X_n)|(X1=x)}(B) &= \sum_{(x_2,\dots,x_n)\in B\cap(X_2(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega))} P_{(X_1=x)}((X_2, \dots, X_n) = (x_2, \dots, x_n))\\ &= \sum_{(x_2,\dots,x_n)\in B\cap(X_2(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega))} \frac{P(X_1 = x, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)}{P(X_1 = x)}\end{aligned}$$

Une deuxième loi conditionnelle

Si $P(X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \neq 0$, on peut définir la loi sachant $(X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$ de X_1 par la donnée de :

$$\begin{aligned} P_{X_1|(X_2=x_2,\dots,X_n=x_n)}(\{x\}) &= P_{(X_2=x_2,\dots,X_n=x_n)}(X_1 = x)) \\ &= \frac{P(X_1 = x, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)}{P(X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)} \end{aligned}$$

et alors, pour toute partie B de E_1 :

$$\begin{aligned} P_{X_1|(X_2=x_2,\dots,X_n=x_n)}(B) &= \sum_{x \in B \cap X_1(\Omega)} P_{(X_2=x_2,\dots,X_n=x_n)}(X_1 = x)) \\ &= \sum_{x \in B \cap X_1(\Omega)} \frac{P(X_1 = x, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)}{P(X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)} \end{aligned}$$

6.3 Annexe : un couple de v.a. est une v.a.

Proposition. On note $X = (X_1, X_2)$. X est une v.a. si et seulement si X_1 et X_2 sont des v.a.

Preuve.

$\boxed{\Rightarrow}$ Commençons par comprendre les notations. On considère $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que :

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

où $X(\omega)$ est un couple de réel, que l'on écrit $(X_1(\omega), X_2(\omega))$. On définit donc deux applications :

$$X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$$

dont on veut montrer que ce sont des v.a.
On note $\pi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \end{array}$ la première fonction projection. On a $X_1 = \pi_1(X)$ est une v.a. en tant que fonction de v.a. Le résultat est identique pour X_2.

$\boxed{\Leftarrow}$ On considère maintenant deux v.a. X_1 et X_2 et on définit

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & (X_1(\omega), X_2(\omega)) \end{array}$$

On veut montrer que X est une v.a.

- $X(\Omega) \subset X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$ est au plus dénombrable, comme partie d'un produit d'ensembles au plus dénombrables.
- Pour $(x_1, x_2) \in X(\Omega) \subset X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \omega \in (X = (x_1, x_2)) &\iff X(\omega) = (x_1, x_2) \\ &\iff (X_1(\omega), X_2(\omega)) = (x_1, x_2) \\ &\iff X_1(\omega) = x_1 \text{ et } X_2(\omega) = x_2 \\ &\iff \omega \in (X_1 = x_1) \text{ et } \omega \in (X_2 = x_2) \\ &\iff \omega \in (X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \end{aligned}$$

Ainsi $(X = (x_1, x_2)) = (X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \in \mathscr{A}$ comme intersection de deux événements.

□

6.4 Annexe : une fonction de v.a. est une v.a.

Lemme. Si s est une surjection d'un ensemble au plus dénombrable D sur un ensemble E, alors E est au plus dénombrable.

Remarque. *En appliquant une fonction, on peut donc que « diminuer le nombre d'éléments ».*

Preuve. Si D est fini, le résultat est clair. On se place dans le cas où D est dénombrable, et on décrit ses éléments en extension :

$$D = \{d_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

ce qui revient à dire que $n \mapsto d_n$ réalise une bijection de $\mathbb{N}$ sur D. Alors :

$$\begin{aligned} E &= s(D) \text{ par surjectivité} \\ &= \{s(d_n),\ n \in \mathbb{N}\} \text{ par définition de l'image} \\ &= \bigcup n \in \mathbb{N}\{s(d_n\} \end{aligned}$$

est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis. □

Proposition. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète, et $f : E \to F$ une application quelconque. Alors la composée $f \circ X$, notée $f(X)$, est une variable aléatoire discrète.

Preuve. Notons $Y = f(X)$, et rappelons qu'il s'agit bien de la composition $f \circ X$.

- $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$ est au plus dénombrable par application du lemme précédent.
- Soit $y \in Y(\Omega)$. Il s'agit de montrer que $(Y = y)$ est un événement. On écrit :

$$\begin{aligned} (Y = y) &= \{\omega \in \Omega,\ f(X(\omega)) = y\} \\ &= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in f^{-1}(\{y\})\} \\ &= \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x)=y}} \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \\ &= \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x)=y}} (X = x) \end{aligned}$$

C'est une union au plus dénombrables d'événements dans $\mathscr{A}$, qui est stable par union dénombrable, donc $(Y = y) \in \mathscr{A}$.

On a montré que $f(X)$ est un variable aléatoire discrète. □

6.5 Annexe : démonstration du lemme des coalitions

Lemme des coalitions.

> Soit $X_1,\dots,X_n$ des v.a.d. indépendantes.
> Alors pour toutes fonctions f et g, $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ sont indépendantes.

Preuve. Notons $Y=f(X_1,\dots,X_m)$ et $Z=g(X_{m+1},\dots,X_n)$. Ce sont des v.a. comme fonctions de v.a. vectorielles.
Soit $(y,z)\in Y(\Omega)\times Z(\Omega)$. On calcule, dans $[0,+\infty]=[0,+\infty[\cup\{+\infty\}$:

$$\begin{aligned}
P(Y=y,Z=z) &= P\Big((f(X_1,\dots,X_m)=y)\cap(g(X_{m+1},\dots,X_n)=z)\Big)\\
&= P\Big(((X_1,\dots,X_m)\in f^{-1}(\{y\}))\cap((X_{m+1},\dots,X_n)\in g^{-1}(\{z\}))\Big)\\
&= P\Big(\bigcup_{\substack{(x_1,\dots,x_m)\in f^{-1}(\{y\})\cap(X_1(\Omega)\times\dots\times X_m(\Omega))\\(x_{m+1},\dots,x_n)\in g^{-1}(\{z\})\cap(X_{m+1}(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega))}}((X_1,\dots,X_m)=(x_1,\dots,x_m))\cap((X_{m+1},\dots,X_n)=(x_{m+1},\dots,x_n))\Big)\\
&= P\Big(\bigcup_{\substack{(x_1,\dots,x_m)\in f^{-1}(\{y\})\cap(X_1(\Omega)\times\dots\times X_m(\Omega))\\(x_{m+1},\dots,x_n)\in g^{-1}(\{z\})\cap(X_{m+1}(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega))}}(X_1=x_1,\dots,X_m=x_m,X_{m+1}=x_{m+1},\dots,X_n=x_n)\Big)\\
&= \sum_{\substack{(x_1,\dots,x_m)\in f^{-1}(\{y\})\cap(X_1(\Omega)\times\dots\times X_m(\Omega))\\(x_{m+1},\dots,x_n)\in g^{-1}(\{z\})\cap(X_{m+1}(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega))}} P\Big((X_1=x_1,\dots,X_m=x_m,X_{m+1}=x_{m+1},\dots,X_n=x_n)\Big) \quad \text{par } \sigma\text{-additivité}\\
&= \sum_{\substack{(x_1,\dots,x_m)\in f^{-1}(\{y\})\cap(X_1(\Omega)\times\dots\times X_m(\Omega))\\(x_{m+1},\dots,x_n)\in g^{-1}(\{z\})\cap(X_{m+1}(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega))}} P(X_1=x_1)\dots P(X_m=x_m)P(X_{m+1}=x_{m+1})\dots P(X_n=x_n) \quad \text{par indépendance}\\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_m)\in f^{-1}(\{y\})\cap\dots}\Big(\sum_{(x_{m+1},\dots,x_n)\in g^{-1}(\{z\})\cap\dots} P(X_1=x_1)\dots P(X_m=x_m)P(X_{m+1}=x_{m+1})\dots P(X_n=x_n)\Big)\\
&\qquad \text{par paquets}\\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_m)\in f^{-1}(\{y\})\cap\dots}\Big(P(X_1=x_1)\dots P(X_m=x_m)\sum_{(x_{m+1},\dots,x_n)\in g^{-1}(\{z\})\cap\dots} P(X_{m+1}=x_{m+1})\dots P(X_n=x_n)\Big)\\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_m)\in f^{-1}(\{y\})\cap\dots}\Big(P(X_1=x_1)\dots P(X_m=x_m)P(Z=z)\Big)\\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_m)\in f^{-1}(\{y\})\cap\dots}\Big(P(X_1=x_1)\dots P(X_m=x_m)\Big) \qquad P(Z=z)\\
&= P(Y=y)P(Z=z)
\end{aligned}$$

ce qui justifie l'indépendance de Y et Z. □

Exercices et résultats classiques à connaître

Loi d'une somme de deux variables de Poisson

830.1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépedantes, qui suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ respectivement. Déterminer la loi de $X+Y$.

Loi du minimum de deux variables géométriques

830.2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépedantes, qui suivent des lois géométriques de paramètres p et q respectivement, avec $p, q \in]0,1[$.

(a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(X > n)$.

(b) Déterminer la loi de $Z = \mathrm{Min}(X, Y)$.

Diagonalisabilité d'une matrice de v.a.

830.3

Soit X et Y deux v.a. indépendantes géométriques de paramètres p et q respectivement. Calculer la probabilité que la matrice :

$$\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Utilisation de la loi conditionnelle

830.4

On désigne par N le nombre d'électrons émis par un élément chimique pendant une période T. On suppose que $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Chaque électron a une probabilité $p \in]0,1[$ d'avoir un effet biologique (on dit dans ce cas qu'il est efficace). On désigne par X le nombre d'électrons efficaces émis pendant une période T.

(a) Donner la loi de X conditionnée par $(N = j)$.

(b) Donner la loi conjointe de (X, N).

(c) Déterminer la loi de X, et la reconnaître.

Exercices du CCINP

830.5 **95.2**

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.
Un joueur tire successivement, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

2. Dans cette question, on suppose que l'on tire simultanément les 5 boules dans l'urne.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

830.6 **97.1**

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P\left((X,Y) = (j,k)\right) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

830.7 **98.12**

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

830.8 **100.12**

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.

830.9 **102.12**

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \underset{1 \leqslant i \leqslant N}{\mathrm{Min}} (X_i)$ c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \mathrm{Min}\left(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)\right)$, Min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y.

830.10 103.2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

2. Soit $p \in]0,1]$. Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
   Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.

830.11 104.12

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

830.12 106.124

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \mathrm{Sup}(X, Y)$ et $V = \mathrm{Inf}(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

830.13 108.134

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

830.14 109

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

830.15 111.123

On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in]0,1[$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) est donnée par :

$$\forall\,(k,n)\in\mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k\leqslant n \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
3. Déterminer la loi de X.

Exercices

830.16

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe est donnée par :

$$P(X=i, Y=j) = \frac{1}{3\mathrm{e}^2}\,\frac{i+j+1}{i!\,j!}$$

(a) Déterminer les lois des variables X et Y.

(b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

830.17

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

(a) Préciser la loi de $X+Y$.

(b) Pour $n\in\mathbb{N}$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y=n)$.

830.18

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule jaune. On effectue des tirages successifs avec remise, et à chaque tirage, on ajoute une boule de la même couleur que celle que l'on avait tiré. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.

(a) Déterminer la loi de X_2.

(b) Déterminer la loi de X_n, pour $n\in\mathbb{N}^*$.

830.19

On lance indéfiniment un dé équilibré. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire définie par la valeur du n-ième lancer. On introduit le temps d'attente du premier ⚅ :

$$T = \operatorname{Min}\Big(\{n\in\mathbb{N}^*,\ X_n=6\}\cup\{+\infty\}\Big)$$

Montrer que T est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$, et déterminer sa loi.

830.20

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$. Comparer $P(X \text{ pair})$ et $P(X \text{ impair})$.

830.21

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$. On note :

$$Y = \begin{cases} \dfrac{X}{2} & \text{si } X \text{ est pair} \\ \dfrac{X-1}{2} & \text{si } X \text{ est impair}\end{cases}$$

(a) Donner un sens à la définition de Y. Est-ce une variable aléatoire ?

(b) Déterminer la loi de Y.

830.22

Soit $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espace probabilisé, et X, X' et Y trois variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $X\sim X'$, que X et Y sont indépendantes, ainsi que X' et Y. Est-ce que $X+Y\sim X'+Y$?

830.23

Pour chaque question, reconnaître la loi de X et en préciser les paramètres :

(a) on lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu

(b) une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on tire au hasard successivement et avec remise 8 boules et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues

(c) une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on effectue des tirages successifs et avec remise jusqu'à obtenir une boule rouge et on note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués

(d) on range au hasard 10 boules dans 3 sacs de façon équiprobable et on note X le nombre de boules mises dans le premier sac

(e) les 32 cartes d'un jeu sont alignées, faces cachées, sur une table de façon aléatoire ; on découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir la dame de cœur et on note X la variable aléatoire égale au nombre de cartes découvertes

(f) une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$) ; on les tire au hasard un à un sans remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1 et on note X le nombre de tirages effectués

(g) une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$) ; on les tire au hasard un à un avec remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1 et on note X le nombre de tirages effectués

(h) on pose n questions à un élève ; pour chaque question, r réponses sont proposées dont une et une seule est correcte ; l'élève répond au hasard à chaque question et on note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

(i) Dans un magasin il y a n clients et m caisses. Chaque client choisit une caisse au hasard et on appelle X le nombre de clients choisissant la caisse numéro 1. Donner la loi de X.

Petits problèmes d'entrainement

830.24 ✍

Une urne contient des boules noires et blanches, la proportion de boules noires étant $p \in]0,1[$. On effectue une succession de tirages d'une boule avec, à chaque fois, remise de la boule obtenue avant d'effectuer le tirage suivant. On note X la longueur de la première suite de boules de même couleur et Y la longueur de la deuxième suite de boules de même couleur. Ainsi, l'événement $(X = 2) \cap (Y = 3)$ est réalisé ssi on a tiré $(n, n, b, b, b, n, \dots)$ ou $(b, b, n, n, n, b, \dots)$ où n désigne le tirage d'une boule noire et b celui d'une boule blanche.

(a) Déterminer la loi de $X + Y$.

(b) Calculer la probabilité de l'événement $(X = Y)$.

830.25 ✍

Une urne contient un dé truqué donnant systématiquement un ⚅. On lance une pièce équilibrée. Si on obtient face, on ajoute un dé équilibré dans l'urne et on relance la pièce. Si on obtient pile, on tire un dé dans l'urne, et on lance celui-ci. Déterminer la loi de la variable donnant la valeur du dé lancé.

830.26

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, \frac{1}{2})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Rappeler la loi de $X + Y$.

(b) Utiliser $P(X + Y = n)$ pour exprimer la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

(c) Deux joueurs tirent chacun n fois une pièce équilibrée. Le gagnant est celui qui obtient le plus de pile. Déterminer la probabilité p_n qu'il y ait un gagnant.

(d) Quelle est la limite de p_n lorsque $n \to +\infty$?

830.27

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On définit :

$$U = |X - Y| \quad \text{et} \quad V = \mathrm{Min}(X, Y)$$

(a) Déterminer la loi du couple (U, V).

(b) En déduire la loi de U et la loi de V.

(c) U et V sont-elles indépendantes ?

830.28

Dans une usine, chaque jour, une machine a la probabilité $p \in]0,1[$ de tomber en panne. Chaque fois qu'elle tombe en panne, un technicien vient la réparer dans la soirée.
On note $q = 1-p$, X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si la machine est tombée en panne le n-ième jour, 0 sinon.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note T_i le jour àù la machine est tombée en panne pour la i-ème fois. Les variables X_n sont supposées indépendantes.
On définit $\tau_1 = T_1$ et, pour $k \geqslant 2$, $\tau_k = T_k - Tk - 1$, le nombre de jour écoulés entre deux pannes successives. On note enfin N_n le nombre de pannes survenues entre les jours 0 et n.

(a) Déterminer la loi de τ_1, et montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les τ_k sont indépendantes et de même loi que τ_1.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi conjointe de $(T_1, \ldots, T_n)$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un inspecteur vient le n-ième jour, et reste jusqu'à la prochaine panne. Calculer la loi des variables aléatoires $V_n = T_{N_n+1} - n$ et $U_n = n - T_{N_n}$.

830.29

Un point se déplace sur $\mathbb{Z}$. Au départ, il est en 0. À chaque étape, il se déplace d'un cran vers la gauche ou d'un cran vers la droite avec une probabilité identique. Les déplacements se font de façon indépendante.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n la position du point à l'étape n. Ainsi, $A_0 = 0$. On note aussi D_n le nombre de déplacements vers la droite après n étapes.

(a) Donner une relation liant A_n et D_n.

(b) Déterminer la loi de D_n.

(c) Trouver la loi de A_n et en déduire que la série $\sum P(A_n = 0)$ diverge.