Espérance et variance

Cours 2

Exercices 12

Sauf mention contraire, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé.

1 Espérance

On s'intéresse dans cette section aux v.a. réelles ou complexes.

1.1 Variables aléatoires réelles positives

Définition. Soit X un v.a. discrète, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. L'**espérance de X** est :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Remarque.

- *Il s'agit de la somme d'une famille au plus dénombrable de réels positifs, cette somme est dans* $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.
- *On peut proposer la même définition lorsque X est à valeurs dans* $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.
- *Contrairement à la définition vue en première année, on somme une famille indexée par $X(\Omega)$ au plus dénombrable, et non par Ω qui peut être très gros. Cela revient à « regrouper » les épreuves selon leur valeur par X.*

Exemple. On lance deux dés, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros qui apparaissent sur les deux dés. Calculer $\mathrm{E}(X)$.

Exemple. On considère X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, définie par sa loi en posant :

$$\forall n \geqslant 1,\ P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Justifier que l'on définit ainsi une loi de probabilités.
Calculer $\mathrm{E}(X)$.

1.2 Une formule pour les v.a. à valeurs entières

Proposition. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$$

Remarque. *On peut généraliser cette formule au cas des v.a. à valeurs dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1.3 Variables aléatoires réelles de signe quelconque, ou complexes

Définition. Soit X une v.a. discrète, à valeurs réelles ou complexes. Lorsque la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, on dit que X **est d'espérance finie**, et on définit :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Dans le cas contraire, X n'a pas d'espérance.

Remarque.

- *X est donc d'espérance finie lorsque* $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} |x|P(X = x) < +\infty$.
- *L'espérance est un indicateur de position de la v.a.*

Notation. On note L^1 l'ensemble des v.a. d'espérance finie.

Exemple. Quelle est l'espérance d'une variable aléatoire discrète constante, égale à a ?

Remarque. *Le résultat reste valable si la v.a. n'est que presque sûrement constante.*

Proposition. Deux variables aléatoires discrètes X et Y admettant la même loi et ayant une espérance finie ont la même espérance.

Définition. Une v.a. est dite **centrée** lorsqu'elle est d'espérance nulle : $\mathrm{E}(X) = 0$.

1.4 Espérance des lois usuelles

Proposition.

- Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $\mathrm{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $\mathrm{E}(X) = p$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors $\mathrm{E}(X) = np$.
- Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{p}$.
- Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors $\mathrm{E}(X) = \lambda$.

Exemple. Si A est un événement, montrer que $\mathbb{1}_A$ est d'espérance finie, et donner $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A)$.

1.5 Propriétés de l'espérance

Formule de transfert.

Soit X une variable aléatoire discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La variable aléatoire $f(X)$ a un espérance finie si et seulement si $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.
On a dans ce cas :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, P(X = x)$$

Remarque. *On peut appliquer ce théorème dans le cas d'une v.a. vectorielle. Par exemple, si X et Y sont deux v.a. réelles, le calcul de $\mathrm{E}(XY)$ relève de la formule de transfert.*

Exemple. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $-1, 0, 1$ avec les probabilités respectives $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{6}{9}$. Vérifier que $\mathrm{E}(X^2) = \frac{7}{9}$.

Espérance finie par comparaison. Si X et Y sont deux v.a. telles que $|X| \leqslant Y$ et Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie et :

$$|\,\mathrm{E}(X)| \leqslant \mathrm{E}(Y)$$

Linéarité de l'espérance. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles ou complexes d'espérances finies. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\, \mathrm{E}(X) + \mu\, \mathrm{E}(Y)$$

Remarque. *Cela signifie que l'ensemble des v.a. d'espérance finie est un espace vectoriel, et que l'espérance est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.*

Exemple. On (re-)lance deux dés, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros qui apparaissent sur les deux dés. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $\mathrm{E}(X)$.

Positivité de l'espérance.
Si X est positive (i.e. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors $\mathrm{E}(X) \geqslant 0$.

Croissance de l'espérance.
Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes d'espérances finies telles que $X \leqslant Y$ alors $\mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}(Y)$.

Remarque.

- *L'hypothèse $X \leqslant Y$ signifie que, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$.*
- *Le résultat reste vrai si $X \leqslant Y$ presque sûrement.*

Inégalité triangulaire. Si X est d'espérance finie, alors :

$$|\,\mathrm{E}(X)| \leqslant \mathrm{E}(|X|)$$

1.6 D'autres propriétés de l'espérance

Proposition. Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque-sûr.

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, d'espérances finies. Alors XY est d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\ \mathrm{E}(Y)$$

Remarque. *Ce résultat peut être généralisé au cas de n variables indépendantes et d'espérances finies.*

2 Variance

On s'intéresse maintenant aux seules v.a. réelles.

2.1 Définitions

Lemme. Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Définition. On note $X \in L^2$ pour dire que X^2 est d'espérance finie.

Remarque.

- *On a donc $L^2 \subset L^1$.*
- *Pour X v.a. réelle discrète, on dit que X admet un moment d'ordre p lorsque $\mathrm{E}(|X|^p) < +\infty$. Dans ce cas, on appelle **moment d'ordre p de X** la quantité $\mathrm{E}(X^p)$.*
- *Admettre un moment d'ordre 1, c'est être d'espérance finie ; et alors le moment d'ordre 1, c'est l'espérance.*

2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit $X, Y \in L^2$. Alors :

- XY est d'espérance finie
- $\big(\mathrm{E}(XY)\big)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\ \mathrm{E}(Y^2)$ ou encore $|\,\mathrm{E}(XY)| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}(X^2)}\,\sqrt{\mathrm{E}(Y^2)}$.

En particulier :

- $\big(\mathrm{E}(X)\big)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)$.

Remarque. *On peut aussi vérifier qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si X et Y sont proportionnelles presque sûrement :*

$$P(X = 0) = 1 \textit{ ou } \exists a \textit{ t.q. } P(Y = aX) = 1$$

On mesure, d'une certaine façon, les dépendances affines en regardant si on est « loin » de l'égalité dans l'inégalité, après centrage.

2.3 Variance et écart-type

Remarque. *Si $\mathrm{E}(X)$ est la « valeur moyenne » de la v.a. X, on souhaite contrôler l'écart entre la valeur de X et cette moyenne : $|X-\mathrm{E}(X)|$. En pratique, le carré $(X-\mathrm{E}(X))^2$ est bien plus facilement manipulable et permet de connaître la valeur absolue.*

Définition. Pour $X \in L^2$, on définit la **variance** de X par :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))^2\right)\\ &= \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2\end{aligned}$$

et l'**écart-type** de X :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

Remarque.

- *On a vu que l'espérance est un indicateur de position des valeurs d'un v.a. La covariance et l'écart-type sont des **indicateurs de dispersion** de ces valeurs.*
- *On dit qu'une v.a. est **réduite** lorsque sa variance vaut 1.*

Proposition. Si $\sigma(X) > 0$, la v.a. $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Remarque. *Pour calculer une variance, on sera amené à calculer $\mathrm{E}(X^2)$; il sera alors souvent utile de remarquer pour réaliser ce calcul de série que $X(X-1) = X^2 - X$, donc par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}(X(X-1)) + \mathrm{E}(X)$.*

2.4 Dilatation, invariance par translation, somme de v.a. indépendantes

Proposition. Soit $X \in L^2$. Pour tout a, b réels :

$$\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$$

Proposition. Soit $X, Y \in L^2$. Alors $X+Y \in L^2$ et :

$$\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$$

Remarque. *Ce résultat se généralise à une somme finie de v.a. indépendantes.*

2.5 Variance des lois usuelles

Proposition.

- Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n\rrbracket)$, alors $\mathrm{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $\mathrm{V}(X) = p(1-p)$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$.
- Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors $\mathrm{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
- Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors $\mathrm{V}(X) = \lambda$.

3 Covariance

On s'intéresse toujours aux seules v.a. réelles.

3.1 Définition

Définition. Soit $X, Y \in L^2$. On appelle **covariance de X et Y** le réel :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Y) &= \operatorname{E}\big((X-\operatorname{E}(X))(Y-\operatorname{E}(Y))\big)\\ &= \operatorname{E}(XY) - \operatorname{E}(X)\operatorname{E}(Y)\end{aligned}$$

Proposition. Si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle.

Remarque. *La réciproque est fausse. Si la covariance est nulle, X et Y peuvent ne pas être indépendantes. Elles sont simplement* ***non corrélées****.*

3.2 Règles de calcul

Proposition.

- $(X, Y) \mapsto \operatorname{Cov}(X, Y)$ est une application bilinéaire, symétrique, positive.
- $\operatorname{V}(X) = \operatorname{Cov}(X, X)$.
- $\operatorname{Cov}(X + a, Y + b) = \operatorname{Cov}(X, Y)$
- $\operatorname{V}(X + Y) = \operatorname{V}(X) + \operatorname{V}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X, Y)$
- Plus généralement :

$$\begin{aligned}\operatorname{V}(X_1 + \cdots + X_n) &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{V}(X_i) + \sum_{i\neq j} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{V}(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)\end{aligned}$$

4 Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

4.1 Inégalité de Markov

Inégalité de Markov.

Soit X une v.a. réelle discrète d'espérance finie. Alors, pour tout $a > 0$:

$$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\operatorname{E}(|X|)}{a}$$

Remarque. *C'est une majoration de la probabilité que la v.a. prenne de grandes valeurs.*

Corollaire. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, X une v.a. réelle discrète admettant un moment d'ordre k. Alors, pour tout $a > 0$:

$$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\operatorname{E}(|X|^k)}{a^k}$$

4.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète, telle que X^2 soit d'espérance finie.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\big(\,|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque. *On peut exprimer le résultat en passant à l'événement contraire :*

$$P\big(\,|X - \mathrm{E}(X)| < \varepsilon\big) \geqslant 1 - \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque. *L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de comprendre ce que mesure la variance : pour $\varepsilon > 0$ fixé, la probabilité que l'écart entre X et $\mathrm{E}(X)$ soit supérieur à ε est d'autant plus petite que $\mathrm{V}(X)$ est faible : la variance donne donc une indication de la dispersion de X autour de son espérance, i.e. sa plus ou moins forte tendance à s'écarter de sa moyenne.*
L'écart-type, qui mesure aussi la dispersion de X, présente l'intérêt de s'exprimer dans la même unité que les valeurs prises par la variable aléatoire X.

Exemple. Pour $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, montrer que :

$$P\left(X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right) \leqslant \frac{4}{\lambda} \text{ et } P\left(X \geqslant 2\lambda\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

4.3 Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie. On note $m = \mathrm{E}(X_1)$ (les espérances sont toutes égales), $\sigma = \sigma(X_1)$ (les écarts-types sont tous égaux) et :

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

et donc :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarque. *Pour déterminer la probabilité d'un événement A, l'idée courante consiste à répéter l'expérience aléatoire un grand nombre de fois, et observer le nombre d'apparition de l'événement A. Lorsque le nombre d'expérience augmente, la fréquence d'apparition de A devrait se rapprocher de la probabilité de A.*
La loi faible des grands nombres formalise et quantifie cette intuition : En notant $p = P(A)$ et X_k l'indicatrice de A, on a $X_k \sim \mathscr{B}(p)$ et X_k représente le nombre de fois que A a été observé à l'expérience k. Ainsi, la fréquence d'apparition de A au cours des n répétitions est la variable aléatoire :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Par la loi faible des grands nombres,

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|M_n - p| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On peut dire que « M_n tend vers $p = P(A)$ » presque sûrement.

5 Annexes

5.1 Annexe : la formule de transfert

Formule de transfert.

Soit X une variable aléatoire discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La variable aléatoire $f(X)$ a un espérance finie si et seulement si $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. On a dans ce cas :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X=x)$$

Preuve. Notons $Y = f(X)$ (qui signifie la composée $f\circ X$).

- Commençons par découper un peu $X(\Omega)$.
Comme $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, $f(X(\Omega)) = Y(\Omega)$ est au plus dénombrable. On partitionne $X(\Omega)$ en regroupant ses éléments selon leur image par f. On définit donc :
$\forall y\in Y(\Omega),\ I_y = f^{-1}(\{y\})\cap X(\Omega) = \{x\in X(\Omega),\ f(x)=y\}$
de sorte qu'on a l'égalité des événements $(Y=y) = (X\in I_y)$, et $(I_y)_{y\in Y(\Omega)}$ est une partition de $X(\Omega)$ (enfin, un recouvrement disjoint).
- Montrons maintenant l'équivalence entre « $f(X)$ est d'espérance finie » et « $(f(x)P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ».
Pour tout $y\in Y(\Omega)$,
$$\begin{aligned}|y|P(Y=y) &= |y|P(X\in I_y)\\ &= |y|\sum_{x\in I_y} P(X=x) \text{ par } \sigma\text{-additivité}\\ &= \sum_{x\in I_y}|f(x)|P(X=x) \text{ par définition de } I_y\end{aligned}$$
Le théorème de sommabilité par paquets indique que $(|y|P(Y=y))_{y\in Y(\Omega)}$ est sommable si et seulement si $(|f(x)|P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, ce qui est l'équivalence annoncée.
- On peut alors sommer selon les paquets I_y :
$$\begin{aligned}\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x) &= \sum_{y\in Y(\Omega)}\Big(\sum_{x\in I_y} f(x)P(X=x)\Big)\\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} y\Big(\sum_{x\in I_y}P(X=x)\Big)\\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} yP(Y=y)\\ &\qquad\text{par } \sigma\text{-additivité}\\ &= \mathrm{E}(Y)\\ &= \mathrm{E}(f(X))\end{aligned}$$

□

Proposition. Lorsque Ω est fini ou dénombrable, et $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$$

Preuve. On remarque que Id_Ω est une v.a. à valeurs dans Ω, et $X : \Omega\to\mathbb{K}$ est une fonction. En appliquant la formule de transfert à la v.a. Id_Ω avec la fonction X, on obtient l'égalité annoncée. □

5.2 Annexe : espérance finie par comparaison

Proposition. Si X et Y sont deux v.a. telles que $|X|\leqslant Y$ et Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie et :

$$|\,\mathrm{E}(X)|\leqslant \mathrm{E}(Y)$$

Preuve.

- Décrivons les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ en extension, avec I et J au plus dénombrables :
$$\begin{aligned}X(\Omega) &= \{x_i,\ i\in I\}\\ Y(\Omega) &= \{y_j,\ j\in J\}\end{aligned}$$
On veut montrer tout d'abord que $|X|$ est d'espérance finie. On calcule donc, dans $[0,+\infty]$:
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(|X|) &= \sum_{i\in I}|x_i|P(X=x_i)\\ &= \sum_{i\in I}|x_i|\Big(\sum_{j\in J}P(X=x_i,Y=y_j)\Big)\\ &\qquad\text{par les probas totales}\\ &\sum_{(i,j)\in I\times J}|x_i|P(X=x_i,Y=y_j)\\ &\qquad\text{par paquets}\end{aligned}$$
Introduisons donc la famille :
$$(|x_i|P(X=x_i,Y=y_j))_{(i,j)\in I\times J}$$
On peut affirmer que, pour tout i,j :
$$|x_i|P(X=x_i,Y=y_j)\leqslant y_jP(X=x_i,Y=y_j)$$
car, si $P(X=x_i,Y=y_j)=0$, c'est une inégalité triviale, et sinon les valeurs x_i et y_j sont atteintes par les v.a. X et Y sur une même épreuve ω, qui réalise $(X=x_i)\cap(Y=y_j)$ donc $|x_i| = |X(\omega)|\leqslant Y(\omega) = y_j$.

On calcule, dans $[0,+\infty]$ (Y est positive) :

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in I\times J} y_j P(X=x_i,Y=y_j) &= \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} y_j P(X=x_i,Y=y_j)\text{ par paquets}\\ &= \sum_{j\in J} y_j P(Y=y_j)\text{ par les probas totales}\\ &= \mathrm{E}(Y)\\ &< +\infty \text{ par définition}\end{aligned}$$

Donc, par majoration, la famille $(|x_i|P(X=x_i,Y=y_j))_{(i,j)}$ est sommable et donc $|X|$ est d'espérance finie.

- Reprenant les deux calculs précédents, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(|X|) &= \sum_{(i,j)\in I\times J} |x_i| P(X=x_i,Y=y_j)\\ &\leqslant \sum_{(i,j)\in I\times J} y_j P(X=x_i,Y=y_j)\\ &= \mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

□

5.3 Annexe : linéarité de l'espérance et conséquences

Linéarité de l'espérance. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles ou complexes d'espérances finies. Alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, λX et $X+Y$ sont d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}(\lambda X)=\lambda\,\mathrm{E}(X) \text{ et } \mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)$$

Preuve.

- Calculons, dans $[0,+\infty]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(|\lambda X|) &= \sum_{x\in X(\Omega)} |\lambda x| P(X=x)\text{ par transfert}\\ &= |\lambda|\sum_{x\in X(\Omega)} |x|P(X=x)\\ &= |\lambda|\,\mathrm{E}(|X|)\\ &< +\infty\text{ par hypothèse}\end{aligned}$$

donc λX est d'espérance finie, et on peut calculer :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\lambda X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \lambda x P(X=x)\text{ par transfert}\\ &= \lambda\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)\\ &= \lambda\,\mathrm{E}(X)\end{aligned}$$

- Calculons, dans $[0,+\infty]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(|X+Y|) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} |x+y|P(X=x,Y=y)\\ &\qquad\text{par transfert}\\ &\leqslant \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} (|x|+|y|)P(X=x,Y=y)\\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} |x|P(X=x,Y=y)\\ &\qquad + \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} |y|P(X=x,Y=y)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} |x|P(X=x)+\sum_{y\in Y(\Omega)} |y|P(Y=y)\\ &\qquad\text{par paquets}\\ &= \mathrm{E}(|X|)+\mathrm{E}(|Y|)\\ &< +\infty\end{aligned}$$

donc $X+Y$ est d'espérance finie, et on peut calculer :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X+Y) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} x+yP(X=x,Y=y)\\ &\qquad\text{par transfert}\\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xP(X=x,Y=y)\\ &\qquad + \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} yP(X=x,Y=y)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)+\sum_{y\in Y(\Omega)} yP(Y=y)\\ &\qquad\text{par paquets}\\ &= \mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

□

Positivité de l'espérance.
Si X est positive, alors $\mathrm{E}(X)\geqslant 0$.

Preuve. On calcule, dans $[0,+\infty]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)\\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

par positivité de chaque $x\in X(\Omega)$. □

Croissance de l'espérance.
Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes d'espérances finies telles que $X\leqslant Y$ alors $\mathrm{E}(X)\leqslant\mathrm{E}(Y)$.

Preuve. Par hypothèse, $Y-X\geqslant 0$ donc $\mathrm{E}(Y-X)\geqslant 0$. Comme X et Y sont d'espérance finie, on a par linéarité $\mathrm{E}(Y)-\mathrm{E}(X)\geqslant 0$. □

Inégalité triangulaire. Si X est d'espérance finie, alors :

$$|\mathrm{E}(X)|\leqslant\mathrm{E}(|X|)$$

Preuve. On suppose X d'espérance finie. On a $X\leqslant|X|$ et $-X\leqslant|X|$, donc par croissance et linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(X)\leqslant\mathrm{E}(|X|)$ et $-\mathrm{E}(X)\leqslant\mathrm{E}(|X|)$. On a donc montré que :

$$|\mathrm{E}(X)|\leqslant\mathrm{E}(|X|)$$

□

Proposition. Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X=0)$ est presque-sûr.

Preuve. Écrivons :

$$\begin{aligned}0 &= \mathrm{E}(X)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)\\ &= 0P(X=0) + \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x\neq 0}} xP(X=x)\end{aligned}$$

C'est une somme nulle de termes positifs, puisque tous les x sont $\geqslant 0$, donc pour tout $x \in X(\Omega)$ non nul, $P(X=x)=0$. Alors, par σ-additivité :

$$P(X\neq 0) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x\neq 0}} P(X=x) = 0$$

C'est donc que $P(X=0)=1$: $X=0$ presque sûrement. □

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, d'espérances finies. Alors XY est d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Preuve. On calcule, dans $[0,+\infty]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(|XY|) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} |xy|P(X=x,Y=y)\\ &\qquad \text{par transfert}\\ &\leqslant \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} |x|P(X=x)\,|y|P(Y=y)\\ &\qquad \text{par indépendance}\\ &= \Big(\sum_{x\in X(\Omega)} |x|P(X=x)\Big)\Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} |y|P(Y=y)\Big)\\ &\qquad \text{par le théorème de Fubini positif}\\ &= \mathrm{E}(|X|)\,\mathrm{E}(|Y|)\\ &< +\infty\end{aligned}$$

donc XY est d'espérance finie, et on peut calculer :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP(X=x,Y=y)\\ &\qquad \text{par transfert}\\ &\leqslant \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xP(X=x)\,yP(Y=y)\\ &\qquad \text{par indépendance}\\ &= \Big(\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)\Big)\Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} yP(Y=y)\Big)\\ &\qquad \text{par le théorème de Fubini}\\ &= \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

□

5.4 Annexe : inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres

Inégalité de Markov.

Soit X une v.a. réelle discrète d'espérance finie. Alors, pour tout $a>0$:

$$P(|X|\geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(|X|)}{a}$$

Première preuve. Soit $X\in L^1$ et $a>0$. Minorons l'espérance de $|X|$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(|X|) &= \sum_{x\in X(\Omega)} |x|P(X=x) \text{ par transfert}\\ &= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x|\geqslant a}} |x|P(X=x) + \underbrace{\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x|<a}} |x|P(X=x)}_{\geqslant 0}\\ &\geqslant \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ |x|\geqslant a}} aP(X=x)\\ &= aP(|X|\geqslant a) \text{ par } \sigma\text{-additivité}\end{aligned}$$

Ce qui justifie l'inégalité annoncée. □

Deuxième preuve. Soit $X\in L^1$ et $a>0$. Remarquons que :

$$|X| = |X|\mathbb{1}_{|X|\geqslant a} + |X|\mathbb{1}_{|X|<a}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(|X|) &= \mathrm{E}(|X|\mathbb{1}_{|X|\geqslant a}) + \underbrace{\mathrm{E}(|X|\mathbb{1}_{|X|<a})}_{\geqslant 0} \text{ par linéarité}\\ &\geqslant \mathrm{E}(|X|\mathbb{1}_{|X|\geqslant a})\\ &\geqslant \mathrm{E}(a\mathbb{1}_{|X|\geqslant a}) \text{ car } |X(\omega)\geqslant a \text{ lorsque } \omega\in(|X|\geqslant a)\\ &= a\,\mathrm{E}(\mathbb{1}_{|X|\geqslant a})\\ &= aP(|X|\geqslant a)\end{aligned}$$

□

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète, telle que X^2 soit d'espérance finie.
Alors, pour tout $\varepsilon>0$:

$$P\big(|X-\mathrm{E}(X)|\geqslant\varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Preuve. On applique l'inégalité de Markov à $(X-\mathrm{E}(X))^2$ et a^2 :

$$\begin{aligned}P(|X-\mathrm{E}(X)|\geqslant a) &= P((X-\mathrm{E}(X))^2\geqslant a^2)\\ &\qquad \text{par positivité de } a \text{ et } |X-\mathrm{E}(X)|\\ &\leqslant \frac{\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))^2}{a^2}\\ &= \frac{\mathrm{V}(X)}{a^2}\end{aligned}$$

□

Loi faible des grands nombres.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie. On note $m = \mathrm{E}(X_1)$ (les espérances sont toutes égales), $\sigma = \sigma(X_1)$ (les écarts-types sont tous égaux) et :

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

et donc :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Preuve. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $\frac{S_n}{n}$. On calcule d'abord :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \mathrm{V}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\mathrm{V}\left(X_1 + \cdots + X_n\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\big(\mathrm{V}(X_1) + \cdots + \mathrm{V}(X_n)\big) \text{ par indépendance}\\
&= \frac{1}{n^2}\sigma^2\\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

□

5.5 Annexe : la loi de Poisson comme loi des événements rares

On considère un centre d'assistance téléphonique susceptible d'être appelé par m clients. On veut modéliser par une loi de probabilité le nombre N d'appels que ce centre reçoit pendant un intervalle de temps donné T (par exemple, $T = 1$ heure).

On appelle $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ le nombre d'appels du client i pendant cet intervalle de temps, et on suppose que $X_i \sim \mathscr{B}(p)$, c'est-à-dire que le client appelle une fois, ou n'appelle pas. On suppose d'autre part que les X_i sont indépendantes.

On a ainsi $N = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$, somme de m variables de Bernoulli indépendantes, donc $N \sim \mathscr{B}(m, p)$ est une variable binomiale. On sait qu'alors :

$$\mathrm{E}(N) = mp$$

On suppose connaître cette espérance : on sait qu'il y a en moyenne λ appels pendant un intervalle de temps T. Et donc, on peut conclure que :

$$N \sim \mathscr{B}\left(m, \frac{\lambda}{m}\right) \text{ avec } m \text{ « grand »}$$

Pour $k \in [\![0, m]\!]$:

$$\begin{aligned}
P(N = k) &= \binom{m}{k}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k\left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^{m-k}\\
&= \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}\left(\frac{\frac{\lambda}{m}}{1 - \frac{\lambda}{m}}\right)^k\left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^m\\
&\qquad \text{au voisinage de } m \to +\infty,\ k \text{ fixé}\\
&\underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{m^k}{k!}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \underbrace{\mathrm{e}^{m\ln\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)}}_{\text{de limite } \mathrm{e}^{-\lambda}}\\
&\underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Sans légitimer le remplacement de $\mathscr{B}\left(m, \frac{\lambda}{m}\right)$ par $\mathscr{P}(\lambda)$, ce calcul explique l'utilisation de la loi de Poisson comme « loi des événements rares ». Des calculs numériques montrent que, pour m assez grand, l'approximation est bonne.

Exercices et résultats classiques à connaître

Un calcul d'espérance

831.1

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \dfrac{\alpha}{n2^n}$.

(a) Déterminer α pour que la famille $(n, p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X.

(b) X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

(c) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire $Y = (\ln 2)X - 1$?

Une v.a. dont la loi est définie par récurrence

831.2

Soit $\lambda > 0$ et X un variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{\lambda}{n} P(X = n - 1)$$

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Déterminer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Un couple de v.a.

831.3

On lance une pièce amenant pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, jusqu'à l'obtention de deux piles au total. On note X le nombre de faces alors obtenues.
Si $X = n$, on met $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire une boule au hasard. On note Y le numéro de la boule obtenue.

(a) Déterminer la loi de X. Calculer $\mathrm{E}(X)$.

(b) Déterminer la loi du couple (X, Y), et en déduire la loi de Y. Calculer $\mathrm{E}(Y)$.

(c) On définit la variable aléatoire $Z = X - Y$. Montrer que Y et Z sont indépendantes.

Longueur d'une séquence homogène

831.4

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, et modélisant le jeu de Pile ou Face infini, où $\mathsf{P} = 1$ et $\mathsf{F} = 0$. On s'intéresse à la longueur L_1 de la première séquence homogène, et à la longueur L_2 de la deuxième séquence homogène.
Par exemple :

$$(X_n(\omega))_{n\geqslant 1} = \big(\underbrace{\mathsf{P\ P\ P\ P}}_{L_1}\overbrace{\mathsf{F\ F\ F\ F\ F}}^{L_2}\ \mathsf{P\ P\ F\ F\ F\ P}\big)$$

Ici, la première séquence homogène a pour longueur $L_1(\omega) = 4$ et la deuxième $L_2(\omega) = 5$.

(a) Quelle est la loi de L_1 ? son espérance ?

(b) Déterminer la loi du couple (L_1, L_2).

(c) Calculer l'espérance de L_2.

Exercices du CCINP

831.5 95.1

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.
Un joueur tire successivement, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

1. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font avec remise.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

831.6 97

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P\left((X,Y) = (j,k)\right) = \frac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

831.7 98

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\dbinom{n-i}{k-i}\dbinom{n}{i} = \dbinom{k}{i}\dbinom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

831.8 99

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in L^2$.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall\, a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application**
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

831.9 100

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

831.10 — INP 102

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \underset{1 \leqslant i \leqslant N}{\mathrm{Min}} (X_i)$ c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \mathrm{Min}\,(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, Min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

831.11 — INP 103.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0, +\infty[)^2$.
   Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

831.12 — INP 104

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

831.13 — INP 106

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \mathrm{Sup}(X, Y)$ et $V = \mathrm{Inf}(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
   En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

831.14 — INP 108.12

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall\, (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.

2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

831.15 **111.2**

On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in]-1,1[,\ \sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que $\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in]0,1[$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) est donnée par :

$$\forall\,(k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.

Exercices

831.16

Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Déterminer l'espérance de $\dfrac{1}{X+1}$.

831.17

Soit $X \sim \mathscr{G}(p)$. Déterminer l'espérance de $\dfrac{1}{X}$.

831.18

Soit X et Y deux v.a. indépendantes géométriques de paramètres p et q respectivement. Calculer l'espérance de $\mathrm{Max}(X,Y)$.

831.19

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = kP(X \geqslant n)$$

Déterminer la loi de X, puis calculer son espérance et sa variance.

831.20

On s'intéresse aux visiteurs d'un magasin, et on suppose que leur nombre quotidien suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que chaque client a la probabilité $p \in]0,1[$ d'effectuer un achat, et que sinon, il ne fait que regarder. Sur une journée, on note X_1 le nombre de clients ayant effectué un achat, et X_2 le nombre de ceux qui n'ont pas réalisé d'achat.

(a) Déterminer la loi de X_1.

(b) Calculer la covariance de X_1 et X_2.

(c) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

831.21

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N. On effectue une suite infinie de tirages d'un jeton avec remise dans l'urne du jeton tiré.
On note, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i la variable aléatoire égale au numéro du jeton obtenu au i-ème tirage.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance et la variance de S_n.

831.22

On note $p_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(a) Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une distribution de probabilités.

On considère X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par $P(X=n) = p_n$.

(b) Montrer que X est d'espérance finie, et la calculer.

(c) Montrer que X admet une variance et la calculer.

831.23

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes suivant une même loi d'espérance m et de variance σ^2.

(a) On pose

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Calculer espérance et variance de $\bar{X}_n$.

(b) On pose

$$V_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$$

Calculer l'espérance de V_n.

831.24

On lance 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparition du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

831.25

Soit $n \geqslant 1$ un entier et X une v.a. suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(\frac{1}{n})$.

(a) Montrer que $P(X \geqslant n^2) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

(b) Montrer que $P(|X - n| \geqslant n) \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$.

En déduire que $P(X \geqslant 2n) \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$.

Petits problèmes d'entrainement

831.26 ✍

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :
$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = i, Y = j) = \dfrac{a}{i!\,j!}$.

(a) Déterminer la valeur de a.

(b) Déterminer la loi de X et la loi de Y. Montrer que X et Y admettent une espérance et calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{E}(Y)$.

(c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(d) On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z. Montrer que Z admet une espérance et calculer $\mathrm{E}(Z)$.

831.27 ✍

300 personnes vont voir un film projeté dans deux salles de cinéma. Chaque salle contient N places, où $150 \leqslant N \leqslant 300$.
Déterminer une valeur de N pour que la probabilité que chaque personne trouve une place dans la salle qu'elle a choisie soit supérieure à 0.99.
Proposer un code Python permettant d'en faire le calcul exact.

831.28

On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour y déceler l'éventuelle présence d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p indépendamment des autres.
On dispose pour cela de deux protocoles :
Protocole 1 :
On analyse le sang de chacun des N individus.
Protocole 2 :
On regroupe les individus par groupe de n (on suppose N divisible par n). On rassemble la collecte de sang des individus d'un même groupe et on teste l'échantillon. Si le résultat est positif, on analyse alors le sang de chacun des individus du groupe.

(a) Préciser la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de groupes positifs.

(b) Soit Y la variable aléatoire déterminant le nombre d'analyses effectuées dans le deuxième protocole.
Exprimer l'espérance de Y en fonction de n, N et p.

(c) Comparer les deux protocoles pour les valeurs $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0,01$.

831.29

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathscr{B}(p)$. On fixe $k \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$P(X_n \leqslant k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

831.30

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d, de variables centrées, à valeurs dans $[-1,1]$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{ch}(x) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.
On pourra utiliser les séries entières.
En déduire que, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $x \in [-1,1]$:

$$\mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}} + x \operatorname{sh} \lambda$$

(b) Montrer que, si X est une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[-1,1]$, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$:

$$E\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \text{ et } E\left(\mathrm{e}^{-\lambda X}\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$$

(c) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, si $\lambda > 0$:

$$P(X \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda a} E\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right)$$

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in \mathbb{R}_+$:

$$P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geqslant a\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)$$

831.31

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a. suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Montrer que $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

(b) Soit Z une v.a. centrée admettant un moment d'ordre 2. On note $V(Z) = \sigma^2$.

b1. Montrer que, pour tout $a > 0$ et $x > 0$:

$$P(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + x^2}{(x+a)^2}$$

b2. En déduire que :

$$P(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} \text{ et } P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda + 1}$$

831.32

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et $Z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{E_n}$. Montrer que :

$$E(Z) \leqslant +\infty \iff \sum P(E_n) \leqslant +\infty$$

831.33

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de v.a. suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$ (on les appelle des variables de Rademacher). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

(a) Pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $E(\mathrm{e}^{tS_n} \leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2}\right)$.

(b) Pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2\exp\left(\dfrac{a^2}{2n}\right)$.

(c) Montrer que le résultat de la question précédente subsiste si $(X_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de v.a. centrées et bornées par 1.

831.34

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, \quad Y_n = \frac{X_n + X_{n+1}}{2}, \quad T_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}.$$

(a) Justifier : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(\big|S_n - p\big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$

(b) b1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi et l'espérance de Y_n.

b2. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < m$.

Les variables aléatoires Y_n et Y_m sont-elles indépendantes ?

(c) Montrer : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(\big|T_n - p\big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$