

Fonctions génératrices

Cours	2
1 Définition	2
2 Propriétés, régularité	2
3 Fonction génératrice et somme	3
4 Annexe : Dérivabilité et espérance	3
Exercices	4
Exercices et résultats classiques à connaître	4
Identité de Wald	4
Exercices du CCINP	5
Exercices	5
Petits problèmes d'entraînement	6

Sauf mention contraire, (Ω, \mathcal{A}, P) est un espace probabilisé.

On s'intéresse dans ce chapitre uniquement aux variables aléatoires qui sont à valeurs dans \mathbb{N} . Typiquement, celles qui apparaissent dans des situations de comptage.

1 Définition

Lemme. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . La série entière :

$$\sum_{n \geq 0} P(X = n)t^n$$

converge normalement sur $[-1, 1]$ (et même $DF(0, 1)$ si on considère la variable complexe), et son rayon de convergence satisfait : $R_X \geq 1$.

Définition. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . On définit la **fonction génératrice** de X par :

$$G_X : t \mapsto \sum_{n \geq 0} P(X = n)t^n$$

Remarque. $G_X(1) = 1$ et $G_X(t) = E(t^X)$ par la formule de transfert.

Proposition. La loi d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} est caractérisée par sa fonction génératrice.

Fonctions génératrices des lois usuelles.

- Si $X \sim \mathcal{U}([1, n])$, alors $G_X(t) = \frac{1}{n}(t + t^2 + \dots + t^n)$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $G_X(t) = pt + (1 - p)$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $G_X(t) = (pt + (1 - p))^n$.
- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1 - p)t}$.
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

2 Propriétés, régularité

Proposition. On conserve les notations précédentes. G_X est continue sur $[-1, 1]$ (et même sur $DF(O, 1)$ si on considère la variable complexe).

Proposition. On conserve les notations précédentes.

X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 (à gauche).

Dans ce cas :

$$E(X) = G'_X(1)$$

Proposition. On conserve les notations précédentes.

X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 (à gauche).

Dans ce cas :

$$G''_X(1) = E(X(X - 1))$$

Remarque. De cette égalité, il faut savoir retrouver rapidement l'expression de la variance à l'aide de G :

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$$

Exemple. Retrouver par les fonctions génératrices espérance et variance des lois usuelles.

3 Fonction génératrice et somme

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} . Si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $t \in]-1, 1[$:

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$$

où $G_X(t) G_Y(t)$ est le produit de Cauchy des deux séries entières.

Exemple. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ . Alors :

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

Proposition. Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} . Si elles sont indépendantes, alors pour tout $t \in]-1, 1[$:

$$G_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t) \dots G_{X_n}(t)$$

4 Annexe : Dérivabilité et espérance

Proposition. Soit $E(X) < +\infty$, G_X est dérivable en 1.

Preuve. On suppose X d'espérance finie.

Notons, pour $t \in [0, 1]$, $f_n(t) = P(X = n)t^n$. On applique le théorème de classe \mathcal{C}^1 des séries de fonctions :

- $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$
- les f_n sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et $f'_n(t) = nP(X = n)t^{n-1}$
- Pour tout $t \in [0, 1]$, $|f'_n(t)| \leq nP(X = n)$ est une majoration indépendante de t par le terme général d'une série convergente, puisqu'on a supposé $E(X) < +\infty$, donc $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 1]$.

Par suite, G_X est dérivable sur $[0, 1]$, et, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n)t^{n-1}. \text{ En particulier, } G'_X(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = E(X). \quad \square$$

Proposition. Si G_X est dérivable en 1, alors $E(X) < +\infty$.

Preuve. On suppose G_X dérivable en 1. Elle l'est donc sur $[0, 1]$, et pour $t \in [0, 1]$, $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n)t^{n-1}$. (On n'est pas sûr de pouvoir dériver terme à terme en 1).

- Vérifions que G'_X est majorée sur $[0, 1]$.

On suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas. On remarque que G'_X est croissante sur $[0, 1]$, et donc, par limite monotone :

$$G'_X(t) \xrightarrow[t \nearrow 1]{} +\infty$$

La continuité de G_X étant assurée en 1, le théorème limite de la dérivée s'applique, et on déduit que G_X n'est pas dérivable en 1, mais que son graphe présente une demi-tangente verticale.

Cela contredit l'hypothèse, c'est donc qu'il existe M tel que $\forall t \in [0, 1]$, $G'_X(t) \leq M$.

- Fixons $N \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N nP(X = n)t^{n-1} &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n)t^{n-1} \\ &\quad \text{en ajoutant des termes } \geq 0 \\ &= G'_X(t) \\ &\leq M \end{aligned}$$

On a donc, en passant à la limite pour $t \nearrow 1$:

$$\sum_{n=1}^N nP(X = n) \leq M$$

La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum nP(X = n)$ est donc majorée par M , c'est que la série converge. On a montré que $E(X) < +\infty$. \square

Exercices et résultats classiques à connaître**Identité de Wald****840.1**

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X , à valeurs dans \mathbb{N}^* . Soit N une autre variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , indépendante des X_i . On s'intéresse à :

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

On note qu'ici le nombre de termes dans la somme est la variable aléatoire N .

- (a) Qu'est-il raisonnable de conjecturer quant à la valeur de $E(S)$?
- (b) Justifier que S est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .
- (c) Montrer que, pour $t \in [-1, 1]$:

$$G_S(t) = G_N(G_X(t))$$

- (d) On suppose que N et X sont d'espérance finie. Établir :

$$E(S) = E(N)E(X)$$

- (e) On lance une pièce honnête. Tant que l'on obtient « pile », on lance un dé et on avance son pion du nombre de cases correspondantes. De combien de case avance le pion en moyenne ?

Exercices du CCINP

840.2

 96

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = p_n$.

La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par :

$$G_X(t) = E[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$$

1. Prouver que l'intervalle $] -1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X .
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} . On pose $S = X_1 + X_2$.
Démontrer que $\forall t \in] -1, 1[, G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$:

- (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières ;
- (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice.

Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} .

3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
On note S_n la somme des numéros tirés.
Soit $t \in] -1, 1[$.
Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n .

840.3

 103.1

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0, +\infty[)^2$.
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) .
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

- (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

840.4

 110

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans \mathbb{N} .
On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t .
On note R_X son rayon de convergence.

- (a) Prouver que $R_X \geq 1$.

On pose $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X .
Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

Pour tout réel t fixé de $[-1, 1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.

- (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ .
Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
(b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .
Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Exercices

840.5

Soit X_1, \dots, X_m des v.a. indépendantes, de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$. On définit $Y = X_1 + \dots + X_m$.

- (a) Déterminer la fonction génératrice de Y .
- (b) En déduire la loi de Y .

(c) Calculer l'espérance et la variance de Y .

840.6

Lors d'une compétition de saut en hauteur, un athlète tente de franchir des barres successives numérotées $1, 2, \dots, n, \dots$. Il n'a droit qu'à un seul essai par barre. On suppose les sauts indépendants, et que la probabilité de réussite du n -ième saut est $\frac{1}{n}$.

- On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi. Calculer la loi de X .
- Déterminer la fonction génératrice de X .
- Montrer que X^2 est d'espérance finie et calculer $E(X)$ et $V(X)$.

840.7

Un poule pond N œufs, où N suit une loi de Poisson de paramètre λ . Chaque œuf éclot avec une probabilité p , et les éclosions sont des événements indépendants. On note K la variable aléatoire donnant le nombre de poussins. Calculer la fonction génératrice de K , puis reconnaître la loi de K .

840.8

On lance une infinité de fois une pièce ayant une probabilité $p \in]0, 1[$ de donner pile, les lancers étant indépendants. On note N la nombre de lancer nécessaires pour obtenir le premier pile. On lance ensuite N fois la même pièce, et on note X le nombre de pile obtenus.

- Déterminer la loi de N , puis la loi de X .
- Calculer la fonction génératrice de X .
- En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

840.9

Soit X une v.a. suivant la loi $\mathcal{W}([1, N])$ avec $N \in \mathbb{N}^*$.

- Donner la fonction génératrice de X .
- En déduire l'espérance et la variance de X .

Petits problèmes d'entraînement

840.10

On considère une expérience aléatoire ayant une probabilité p de réussir de $q = 1 - p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n \geq 1}$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \iff X_1 + \dots + X_k = m \text{ et } X_1 + \dots + X_{k-1} < m$$

- Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1 .
- Même question avec $S_m - S_{m-1}$ pour $m \geq 2$.
- Déterminer la fonction génératrice de S_m puis la loi de S_m .

840.11

On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité $p > 0$ de réussir et $1 - p$ d'échouer.

On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et on note X le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

- Reconnaître la loi de X lorsque $m = 1$.
- Déterminer la loi de X dans le cas général $m \in \mathbb{N}^*$.
- Exprimer le développement en série entière de

$$t \mapsto \frac{1}{(1-t)^m}$$

- Déterminer la fonction génératrice de X et en déduire l'espérance de X .

840.12

Soit n un entier et X une variable aléatoire à valeurs naturelles dont la loi est donnée par :

$$P(X = k) = a \binom{n+k}{k} p^k \text{ avec } a > 0 \text{ et } p \in]0, 1[$$

Utiliser une fonction génératrice pour calculer espérance et variance de X .

840.13

- (a) Quelles sont les racines réelles du polynôme $1 + X + \dots + X^{10}$?
- (b) Utiliser les fonctions génératrices pour montrer qu'il est impossible de truquer deux dés à 6 faces de façon à ce que, lors d'un lancer, la somme des deux dés suive la loi $\mathcal{U}([2, 12])$.

840.14

On considère une famille $(X_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi X , à valeurs dans \mathbb{N} , et $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires définie par récurrence par :

$$Z_0 = 1 \text{ et } Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{j,n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Concrètement, $(Z_n)_n$ modélise l'évolution d'une population dont, à chaque instant n , les individus meurent en donnant naissance, de manière indépendante à des enfants dont le nombre suit la loi X .

On note φ la fonction génératrice de X , et on suppose que X admet une espérance finie que l'on note $m = E(X)$, et on suppose aussi que $P(X = 0) + P(X = 1) < 1$.

- (a) Montrer que φ est strictement croissante, dérivable, et que φ' est strictement croissante, sur $[0, 1]$.
- (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note φ_n la fonction génératrice définie sur $[0, 1]$ de Z_n . Montrer que $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ \varphi$. En déduire $E(Z_n)$.
- (c) Soit T la variable aléatoire représentant le plus petit entier n (ou $+\infty$ si cet entier n'existe pas) tel que $Z_n = 0$ (extinction de la population). Montrer que $P(T < +\infty)$ est le plus petit point fixe de φ .
- (d) Montrer que la population s'éteint presque sûrement si et seulement si $m \leq 1$.