

## Fonctions génératrices

<b>Cours</b>	<b>2</b>
1 Définition . . . . .	2
2 Propriétés, régularité . . . . .	2
3 Fonction génératrice et somme . . . . .	3
4 Annexe : Dérivabilité et espérance . . . . .	3
<b>Exercices</b>	<b>4</b>
Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .	4
Identité de Wald . . . . .	4
Exercices du CCINP . . . . .	5
Exercices . . . . .	5
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	6

Sauf mention contraire,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  est un espace probabilisé.

On s'intéresse dans ce chapitre uniquement aux variables aléatoires qui sont à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Typiquement, celles qui apparaissent dans des situations de comptage.

## 1 Définition

**Lemme.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . La série entière :

$$\sum_{n \geq 0} P(X = n)t^n$$

converge normalement sur  $[-1, 1]$  (et même  $DF(0, 1)$  si on considère la variable complexe), et son rayon de convergence satisfait :  $R_X \geq 1$ .

**Définition.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On définit la **fonction génératrice** de  $X$  par :

$$G_X : t \mapsto \sum_{n \geq 0} P(X = n)t^n$$

**Remarque.**  $G_X(1) = 1$  et  $G_X(t) = E(t^X)$  par la formule de transfert.

**Proposition.** La loi d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est caractérisée par sa fonction génératrice.

**Fonctions génératrices des lois usuelles.**

- Si  $X \sim \mathcal{U}([1, n])$ , alors  $G_X(t) = \frac{1}{n}(t + t^2 + \dots + t^n)$ .
- Si  $X \sim \mathcal{B}(p)$ , alors  $G_X(t) = pt + (1 - p)$ .
- Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $G_X(t) = (pt + (1 - p))^n$ .
- Si  $X \sim \mathcal{G}(p)$ , alors  $G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1 - p)t}$ .
- Si  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ , alors  $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ .

## 2 Propriétés, régularité

**Proposition.** On conserve les notations précédentes.  $G_X$  est continue sur  $[-1, 1]$  (et même sur  $DF(O, 1)$  si on considère la variable complexe).

**Proposition.** On conserve les notations précédentes.

$X$  admet une espérance finie si et seulement si  $G_X$  est dérivable en 1 (à gauche).

Dans ce cas :

$$E(X) = G'_X(1)$$

**Proposition.** On conserve les notations précédentes.

$X$  admet une variance si et seulement si  $G_X$  est deux fois dérivable en 1 (à gauche).

Dans ce cas :

$$G''_X(1) = E(X(X - 1))$$

**Remarque.** De cette égalité, il faut savoir retrouver rapidement l'expression de la variance à l'aide de  $G$  :

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$$

**Exemple.** Retrouver par les fonctions génératrices espérance et variance des lois usuelles.

### 3 Fonction génératrice et somme

**Proposition.** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors pour tout  $t \in ]-1, 1[$  :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$$

où  $G_X(t) G_Y(t)$  est le produit de Cauchy des deux séries entières.

**Exemple.** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda$  et  $\mu$ . Alors :

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

**Proposition.** Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Si elles sont indépendantes, alors pour tout  $t \in ]-1, 1[$  :

$$G_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t) \dots G_{X_n}(t)$$

### 4 Annexe : Dérivabilité et espérance

**Proposition.** Soit  $E(X) < +\infty$ ,  $G_X$  est dérivable en 1.

*Preuve.* On suppose  $X$  d'espérance finie.

Notons, pour  $t \in [0, 1]$ ,  $f_n(t) = P(X = n)t^n$ . On applique le théorème de classe  $\mathcal{C}^1$  des séries de fonctions :

- $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0, 1]$
- les  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  et  $f'_n(t) = nP(X = n)t^{n-1}$
- Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $|f'_n(t)| \leq nP(X = n)$  est une majoration indépendante de  $t$  par le terme général d'une série convergente, puisqu'on a supposé  $E(X) < +\infty$ , donc  $\sum f'_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[0, 1]$ .

Par suite,  $G_X$  est dérivable sur  $[0, 1]$ , et, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n)t^{n-1}. \text{ En particulier, } G'_X(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = E(X). \quad \square$$

**Proposition.** Si  $G_X$  est dérivable en 1, alors  $E(X) < +\infty$ .

*Preuve.* On suppose  $G_X$  dérivable en 1. Elle l'est donc sur  $[0, 1]$ , et pour  $t \in [0, 1]$ ,  $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n)t^{n-1}$ . (On n'est pas sûr de pouvoir dériver terme à terme en 1).

- Vérifions que  $G'_X$  est majorée sur  $[0, 1]$ .

On suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas. On remarque que  $G'_X$  est croissante sur  $[0, 1]$ , et donc, par limite monotone :

$$G'_X(t) \xrightarrow[t \nearrow 1]{} +\infty$$

La continuité de  $G_X$  étant assurée en 1, le théorème limite de la dérivée s'applique, et on déduit que  $G_X$  n'est pas dérivable en 1, mais que son graphe présente une demi-tangente verticale.

Cela contredit l'hypothèse, c'est donc qu'il existe  $M$  tel que  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $G'_X(t) \leq M$ .

- Fixons  $N \in \mathbb{N}$ . On a, pour tout  $t \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N nP(X = n)t^{n-1} &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n)t^{n-1} \\ &\text{en ajoutant des termes } \geq 0 \\ &= G'_X(t) \\ &\leq M \end{aligned}$$

On a donc, en passant à la limite pour  $t \nearrow 1$  :

$$\sum_{n=1}^N nP(X = n) \leq M$$

La suite des sommes partielles de la série à termes positifs  $\sum nP(X = n)$  est donc majorée par  $M$ , c'est que la série converge. On a montré que  $E(X) < +\infty$ . □

**Exercices et résultats classiques à connaître****Identité de Wald****85.1**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que  $X$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ . Soit  $N$  une autre variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , indépendante des  $X_i$ . On s'intéresse à :

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

On note qu'ici le nombre de termes dans la somme est la variable aléatoire  $N$ .

- (a) Qu'est-il raisonnable de conjecturer quant à la valeur de  $E(S)$  ?
- (b) Justifier que  $S$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .
- (c) Montrer que, pour  $t \in [-1, 1]$  :

$$G_S(t) = G_N(G_X(t))$$

- (d) On suppose que  $N$  et  $X$  sont d'espérance finie. Établir :

$$E(S) = E(N)E(X)$$

- (e) On lance une pièce honnête. Tant que l'on obtient « pile », on lance un dé et on avance son pion du nombre de cases correspondantes. De combien de case avance le pion en moyenne ?

## Exercices du CCINP

85.2

 96

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , de loi de probabilité donnée par :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = p_n$ .

La fonction génératrice de  $X$  est notée  $G_X$  et elle est définie par :

$$G_X(t) = E[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$$

1. Prouver que l'intervalle  $] -1, 1[$  est inclus dans l'ensemble de définition de  $G_X$ .
2. Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On pose  $S = X_1 + X_2$ .  
Démontrer que  $\forall t \in ] -1, 1[, G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$  :

- (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières ;
- (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice.

**Remarque :** on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à  $n$  variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On effectue  $n$  tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.  
On note  $S_n$  la somme des numéros tirés.  
Soit  $t \in ] -1, 1[$ .  
Déterminer  $G_{S_n}(t)$  puis en déduire la loi de  $S_n$ .

85.3

 103.1

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

1. (a) Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in ]0, +\infty[)^2$ .  
Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .  
On suppose que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .  
Déterminer la loi de  $X_1 + X_2$ .

- (b) En déduire l'espérance et la variance de  $X_1 + X_2$ .

85.4

 110

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

1. Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .  
On considère la série entière  $\sum t^n P(X = n)$  de variable réelle  $t$ .  
On note  $R_X$  son rayon de convergence.

- (a) Prouver que  $R_X \geq 1$ .

On pose  $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$  et on note  $D_{G_X}$  l'ensemble de définition de  $G_X$ .  
Justifier que  $[-1, 1] \subset D_{G_X}$ .

Pour tout réel  $t$  fixé de  $[-1, 1]$ , exprimer  $G_X(t)$  sous forme d'une espérance.

- (b) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Exprimer, en justifiant la réponse,  $P(X = k)$  en fonction de  $G_X^{(k)}(0)$ .
2. (a) On suppose que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .  
Déterminer  $D_{G_X}$  et, pour tout  $t \in D_{G_X}$ , calculer  $G_X(t)$ .  
(b) Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .  
Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de  $X + Y$ .

## Exercices

85.5

Soit  $X_1, \dots, X_m$  des v.a. indépendantes, de même loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$  où  $p \in ]0, 1[$ . On définit  $Y = X_1 + \dots + X_m$ .

- (a) Déterminer la fonction génératrice de  $Y$ .
- (b) En déduire la loi de  $Y$ .

(c) Calculer l'espérance et la variance de  $Y$ .

### 85.6

Lors d'une compétition de saut en hauteur, un athlète tente de franchir des barres successives numérotées  $1, 2, \dots, n, \dots$ . Il n'a droit qu'à un seul essai par barre. On suppose les sauts indépendants, et que la probabilité de réussite du  $n$ -ième saut est  $\frac{1}{n}$ .

- On note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi. Calculer la loi de  $X$ .
- Déterminer la fonction génératrice de  $X$ .
- Montrer que  $X^2$  est d'espérance finie et calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

### 85.7

Un poule pond  $N$  œufs, où  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Chaque œuf éclot avec une probabilité  $p$ , et les éclosions sont des événements indépendants. On note  $K$  la variable aléatoire donnant le nombre de poussins. Calculer la fonction génératrice de  $K$ , puis reconnaître la loi de  $K$ .

### 85.8

On lance une infinité de fois une pièce ayant une probabilité  $p \in ]0, 1[$  de donner pile, les lancers étant indépendants. On note  $N$  la nombre de lancer nécessaires pour obtenir le premier pile. On lancer ensuite  $N$  fois la même pièce, et on note  $X$  le nombre de pile obtenus.

- Déterminer la loi de  $N$ , puis la loi de  $X$ .
- Calculer la fonction génératrice de  $X$ .
- En déduire  $E(X)$  et  $V(X)$ .

### 85.9

Soit  $X$  une v.a. suivant la loi  $\mathcal{W}([1, N])$  avec  $N \in \mathbb{N}^*$ .

- Donner la fonction génératrice de  $X$ .
- En déduire l'espérance et la variance de  $X$ .

## Petits problèmes d'entraînement

### 85.10

On considère une expérience aléatoire ayant une probabilité  $p$  de réussir de  $q = 1 - p$  d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes  $(X_n)_{n \geq 1}$ .

Pour  $m \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_m$  la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de  $m$  succès :

$$S_m = k \iff X_1 + \dots + X_k = m \text{ et } X_1 + \dots + X_{k-1} < m$$

- Déterminer la loi et la fonction génératrice de  $S_1$ .
- Même question avec  $S_m - S_{m-1}$  pour  $m \geq 2$ .
- Déterminer la fonction génératrice de  $S_m$  puis la loi de  $S_m$ .

### 85.11

On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité  $p > 0$  de réussir et  $1 - p$  d'échouer.

On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de  $m$  succès et on note  $X$  le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces  $m$  succès.

- Reconnaître la loi de  $X$  lorsque  $m = 1$ .
- Déterminer la loi de  $X$  dans le cas général  $m \in \mathbb{N}^*$ .
- Exprimer le développement en série entière de

$$t \mapsto \frac{1}{(1-t)^m}$$

- Déterminer la fonction génératrice de  $X$  et en déduire l'espérance de  $X$ .

### 85.12

Soit  $n$  un entier et  $X$  une variable aléatoire à valeurs naturelles dont la loi est donnée par :

$$P(X = k) = a \binom{n+k}{k} p^k \text{ avec } a > 0 \text{ et } p \in ]0, 1[$$

Utiliser une fonction génératrice pour calculer espérance et variance de  $X$ .

**85.13**

- (a) Quelles sont les racines réelles du polynôme  $1 + X + \dots + X^{10}$  ?
- (b) Utiliser les fonctions génératrices pour montrer qu'il est impossible de truquer deux dés à 6 faces de façon à ce que, lors d'un lancer, la somme des deux dés suive la loi  $\mathcal{U}([2, 12])$ .

**85.14**

On considère une famille  $(X_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires indépendantes de même loi  $X$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , et  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de variables aléatoires définie par récurrence par :

$$Z_0 = 1 \text{ et } Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{j,n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Concrètement,  $(Z_n)_n$  modélise l'évolution d'une population dont, à chaque instant  $n$ , les individus meurent en donnant naissance, de manière indépendante à des enfants dont le nombre suit la loi  $X$ .

On note  $\varphi$  la fonction génératrice de  $X$ , et on suppose que  $X$  admet une espérance finie que l'on note  $m = E(X)$ , et on suppose aussi que  $P(X = 0) + P(X = 1) < 1$ .

- (a) Montrer que  $\varphi$  est strictement croissante, dérivable, et que  $\varphi'$  est strictement croissante, sur  $[0, 1]$ .
- (b) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\varphi_n$  la fonction génératrice définie sur  $[0, 1]$  de  $Z_n$ . Montrer que  $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ \varphi$ . En déduire  $E(Z_n)$ .
- (c) Soit  $T$  la variable aléatoire représentant le plus petit entier  $n$  (ou  $+\infty$  si cet entier n'existe pas) tel que  $Z_n = 0$  (extinction de la population). Montrer que  $P(T < +\infty)$  est le plus petit point fixe de  $\varphi$ .

- (d) Montrer que la population s'éteint presque sûrement si et seulement si  $m \leq 1$ .

**85.15**

Soit  $X$  une variable aléatoire. On note  $I_X$  l'ensemble des réels  $t$  tels que  $e^{tX}$  admette une espérance finie, et on pose :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \text{ pour tout } t \in I_X$$

- (a) Montrer que  $I_X$  est un intervalle contenant 0.
- (b) On suppose que 0 est intérieur à l'intervalle  $I_X$ . Montrer que la variable  $X$  admet des moments à tout ordre et que, sur un intervalle centré en 0 :

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n$$

**85.16**

Deux joueurs lancent chacun deux dés usuels, et on veut calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même score. On note  $X_1$  et  $X_2$  et les v.a. des valeurs des dés lancés par le premier joueur,  $Y_1$  et  $Y_2$  celles du second joueur.

- (a) Montrer que  $P(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2) = P(14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2 = 14)$ .
- (b) Déterminer la fonction génératrice de  $Z = 14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2$  en écrivant  $Z$  comme somme de v.a. indépendantes.
- (c) En déduire la valeur de  $P(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2)$ .