

**1 Exercices de niveau 1****901.1***Mines-Télécom*

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Déterminer les  $a \in \mathbb{R}$  tels que  $(a^n A^n)_n$  converge.

*L'examinateur était souriant mais j'ai eu l'impression qu'il essayait de me piéger.*

*Pour l'exercice 2 j'ai directement reconnu une matrice symétrique que j'ai proposé de diagonaliser. Il m'a demandé de rédiger la récurrence de  $(PDP^T)^n = PD^n P^T$  et de justifier que la convergence de  $(D_n)_n$  était équivalente à celle de  $(A_n)_n$ . Je me suis embourbé dans une justification par la norme qui était fautive et quand j'ai prononcé la sous-multiplicativité de la norme 2 il m'a regardé droit dans les yeux et me demandant si j'étais sûr que cette norme était sous-multiplicative. J'ai répondu que oui et il m'a demandé de le démontrer. L'oral s'est fini sans que j'ai pu terminer l'exercice.*

**901.2***ccINP*

Soit  $n$  un entier  $\geq 2$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$A \neq I_n, A \neq -I_n, A^2 = I_n$$

- Montrer que  $\text{tr}(A) \equiv n \pmod{2}$ .
- Montrer que  $\text{tr}(A) \leq n - 2$ .

**901.3***Mines-Télécom*

On considère la matrice :

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sans calcul, déterminer :

- le rang de  $W$  ;
- les valeurs propres et vecteurs propres de  $w$  ;
- si  $W$  est diagonalisable.

*Examinateur sympathique, qui dialogue beaucoup et aide beaucoup. On compose sur un tableau numérique, où on écrit avec son doigt. On a perdu 5 minutes d'explications...*

**901.4***ccINP*

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent.

- Montrer que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\text{Id}_E - au$  est inversible.
- Soit  $v \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u \circ v = v \circ u$ .
  - Montrer que  $v$  est inversible si et seulement si  $u + v$  est inversible.  
*Indication : écrire  $u + v$  comme composée de deux applications.*
  - Montrer que  $\det(u + v) = \det(v)$ .

*Pas d'aide de l'examinateur.*

**901.5**

*Mines-Télécom*

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer le rang de  $A$ , sans calcul, son image et son noyau.

$A$  est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser en minimisant les calculs.

*Comme vous le savez, je n'ai fait que l'oral des mines Telecom. Mon examinateur de maths ne voulait pas me laisser faire l'exercice comme je le voulais, ce qui posait des malentendus, jusqu'à ce que l'examinateur comprenne ce que je faisais et là ça allait mieux. Il y avait 30min de passage, mais au final je n'ai fait que 20min de passage grand max, parce que l'examinateur m'expliquait comment fonctionnait le tableau tactile (au passage, je pense que cet outil vous serait utile, au lieu d'écrire sur les murs lors de la correction d'exos). Sinon il était très sympathique, mais comme j'ai dit très directeur et ça ressemblait au final plus à une colle puisque je ne m'attendais pas à recevoir des directions pendant un examen oral. J'ai eu !!... Aurait pu mieux faire...*

**901.6**

*ccINP*

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB - BA = B$ .

- Montrer que  $AB^k - B^kA = kB^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
- Montrer que  $\det(B^k) \det(A - kI_n) = \det(A) \det(B^k)$ .
- Si  $B$  est inversible et  $\lambda$  valeur propre de  $A$ , montrer que  $\lambda + 1$  est aussi valeur propre de  $A$ . En déduire que  $\det(B) = 0$ .
- Trouver deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $AB - BA = B$ .

**901.7**

*cc-INP*

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $M$  définie par blocs :  $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$

- Montrer que, si  $A$  est semblable à  $B$ , alors  $P(A)$  est semblable à  $P(B)$ .
- Calculer  $M^k$ .
- Exprimer  $P(M)$  en fonction de  $P(A)$ ,  $A$  et  $P'(A)$ .
- En déduire que, si  $M$  est diagonalisable,  $A$  l'est aussi.
- Montrer que, si  $A$  n'est pas inversible et  $M$  diagonalisable, alors  $A$  est nulle.

*Examinatrice sympathique.*

**901.8**

*cc-INP*

- Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
- Soit  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $C \neq 0$  et telles que  $AC = CB$ .
  - Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k C = C B^k$ .
  - En déduire que, pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $P(A)C = C P(B)$ .

- b3. Montrer que le produit de deux matrices est inversible si et seulement si chaque matrice est inversible, en déduire que  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune.
- (c) c1. Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont deux matrices colonnes non nulles, alors  $XY^T$  est non nulle.
- c2. Montrer que, si  $A$  et  $B$  ont une valeur propre en commun, il existe une matrice  $C \neq 0$  telle que  $AC = CB$ .

**901.9**

cc-INP

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ .

- (a) Donner le rang de  $B$  en fonction de celui de  $A$ .
- (b) Montrer que, pour tout  $P \in \mathbb{C}[X] : P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$
- (c) Montre que, si  $B$  est diagonalisable, alors  $A$  est diagonalisable.
- (d) Que penser de la réciproque ?

**901.10**

Mines-Télécom

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $s \in \mathcal{L}(E)$  une symétrie. Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on note :

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}(u \circ s + s \circ u)$$

- (a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ .
- (b) Calculer  $\varphi^3(u)$ . En déduire un polynôme annulateur de  $\varphi$ .
- (c) Est-ce que  $\varphi$  est diagonalisable ?

*Examinateur sympathique qui laisse dérouler l'exercice sans trop poser de questions et donne des indices si besoin.*

**901.11**

Mines-Télécom

- (a) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . Que peut-on dire des coefficients de la comatrice de  $M$  ?
- (b) Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  telles que  $\det(A)$  et  $\det(B)$  sont premiers entre eux. Démontrer qu'il existe  $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  telles que :

$$AU + BV = I_n$$

et donner une méthode permettant de calculer explicitement un tel couple.

- (c) On considère à nouveau  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  telles que  $\det(A)$  et  $\det(B)$  sont premiers entre eux. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, démontrer l'existence de deux polynômes  $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$  tels que les matrices  $P(A)$  et  $Q(B)$  vérifient :

$$AP(A) + BQ(B) = I_n$$

**2 Exercices de niveau 2****901.12**

Centrale 1

Soit  $Y \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$  une colonne non nulle,  $z \in \mathbb{C}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y^\top & z \end{pmatrix}$ . On note  $\alpha = Y^\top Y$ .

- (a) Donner la définition de polynôme minimal et de polynôme caractéristique.  
 (b) Montrer qu'il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  tels que :

$$\chi_A = X^{n-2}(X - \lambda)(X - \mu)$$

- (c) Calculer  $\lambda + \mu$  et  $\lambda^2 + \mu^2$  et en déduire  $\chi_A$  en fonction de  $n$ ,  $\alpha$  et  $z$ .  
 (d) Discuter du rang de  $A^2$ . Déterminer le polynôme minimal de  $A$  selon que  $\alpha$  est nul ou non.

**901.13**

Centrale

Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $f_\alpha : M \mapsto M^\top + \alpha M$ , définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- (a)  $f_0$  est-elle diagonalisable ?  
 (b) Pour quelles valeurs de  $\alpha$   $f_\alpha$  est-elle diagonalisable ?  
 (c) Déterminer les éléments propres de  $f_\alpha$ .

**901.14**

Mines-Ponts

On considère  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  représenté par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base  $\mathcal{B}$ .

- (a) Préciser ses valeurs propres.  $A$  est-elle diagonalisable ?  
 (b) On note  $u$  un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre,  $v$  associé à l'autre valeur propre et  $k$  de coordonnées  $(0, 0, 1)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .  
 Montrer que :

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\mathcal{B}' = (u, v, k)$  et  $\alpha$  est à préciser.

- (c) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer  $B^n$  et en déduire  $A^n$ .  
 (d) *Question bonus* Que dire de  $\dim \text{Vect}(I_3, A, A^2, A^3, \dots)$  ?

*Examinateur neutre, qui partait à plusieurs reprises et aidait peu.*

**901.15**

Centrale

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $p \geq 2$  tel que  $M$  admet  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  valeurs propres distinctes. On suppose :

$$\forall i \in \llbracket 2, p \rrbracket, |\lambda_i| < |\lambda_1| \quad (\star)$$

Pour  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{tr}(M^k) \neq 0$ , on définit :

$$t_k(M) = \frac{\text{tr}(M^{k+1})}{\text{tr}(M^k)}$$

(a) Montrer que  $(t_k)_k$  est définie à partir d'un certain rang et converge.

(b) Montrer que, si  $(\star)$  n'est pas vérifiée, ce n'est pas toujours vrai.

(c) Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ .

c1. Montrer que  $A$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

c2. Déterminer la limite de  $\frac{A^k}{k}$ .

*Examinateur plutôt sympathique qui m'a demandé de faire une méthode "bourrin", pour la question 3a plutôt qu'une analyse/synthèse. C'est un exercice qui reste assez classique.*

**901.16**

Mines-Ponts

Soit  $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ . Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) 0 est racine de  $\chi_A(X)$ , d'ordre de multiplicité  $n$  ;

(ii)  $A$  est semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$  où  $N$  et  $U$  sont des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui sont respectivement nilpotente et inversible.

### 3 Exercices de niveau 3

**901.17**

X

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang 1 telles que  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ . Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables.

**901.18**

X

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose :

$$R(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M^2 = A\}$$

(a) Déterminer le cardinal maximal d'une famille de matrices de  $R(I_n)$  non semblables deux à deux.

(b) On suppose  $A$  diagonalisable avec  $n$  vp distinctes. Déterminer le cardinal de  $R(A)$ .

(c) Est-il vrai que si  $A$  est diagonalisable, toutes les matrices de  $R(A)$  le sont ?

(d) Toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  admet-elle une racine carrée ?

(e) On pose  $U_n = \{I_n + N, N \text{ nilpotente}\}$ . Montrer que toute matrice  $A$  de  $U_n$  admet une unique racine carrée dans  $U_n$ .

**901.19**

X

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\text{tr} A^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ . Montrer que les valeurs propres de  $A$  sont de module strictement inférieur à 1.

### 4 Exercices de la banque CC-INP

63, 67 à 75, 83, 88, 91