

1 Exercices de niveau 1

902.1

cc-INP

On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $X, Y \in E$, on définit $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$.

- (a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire.
- (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^\top)$.
- (c) Soit $Y \in E$. On note $f : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $X \mapsto \|AX - Y\|$
 Montrer que $f(X) = \inf_{Z \in E} (f(Z))$ si et seulement si $A^\top(AX - Y) = 0$.

902.2

cc-INP

Pour $f, g \in E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$, on note $\phi(f, g) = \int_0^1 fg + f'g'$.

- (a) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E .
- (b) On note $F = \{f \in E, f(1) = f(0) = 0\}$ et $G = \{f \in E, f'' = f\}$. Montrer que $F \oplus G = E$.
- (c) Pour $a, b \in [0, 1]$, on pose $E_{a,b} = \{f \in E, f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$.
 - c1. Trouver un élément f_0 dans $E_{a,b}$, puis montrer que $E_{a,b} = \{f_0 + f, f \in F\}$.
 - c2. Trouver le projeté orthogonal de f_0 sur G .
- (d) *et une autre question non traitée. Peut-être :* En déduire $\inf_{h \in E_{a,b}} \int_0^1 h^2 + h'^2$.

Examinateur qui n'intervient que rarement et pose des questions sur le cours.

902.3

Mines-Télécom

Soit f un endomorphisme bijectif dans E euclidien, tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$$

- (a) Montrer que $f(x)$ et x sont orthogonaux.
- (b) Montrer que $s = f \circ f$ est autoadjoint.
- (c) Soit a une valeur propre de s et V_a son espace propre associé. On fixe $x \in V_a \setminus \{0\}$.
 - c1. Montrer que : $\langle s(x), x \rangle = a\|x\|^2 = -\|f(x)\|^2$ et en déduire que $a < 0$.
 - c2. Montrer que $F = \text{Vect}(x, f(x))$ et F^\perp sont stables par f .
- (d) *et d'autres questions...*

Examinateur assez maniaque qui n'hésite pas à couper pendant les explications, il veut aller vite. Lorsqu'on est bloqué, il nous fait passer à la question suivante.

902.4

cc-INP

\mathbb{R}^3 est muni de son produit scalaire canonique $\langle | \rangle$ et de sa norme euclidienne associée $\| \cdot \|$.
 On appelle endomorphisme stabilisant un endomorphisme f de \mathbb{R}^3 tel que $\forall x \in \mathbb{R}^3, \langle f(x)|x \rangle = \|x\|^2$.

- (a) Soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
 Montrer que h est stabilisant.
- (b) b1. Soit f un endomorphisme stabilisant différent de $\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$. On pose $g = f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^3, \langle g(x)|x \rangle = 0$.
 b2. Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de g .
 En étudiant le degré de χ_g , montrer que 0 est valeur propre de g .
- (c) c1. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle x|g(y) \rangle + \langle g(x)|y \rangle = 0$.
 c2. Montrer que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ sont orthogonaux.
- (d) Soit e_1 un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 associé à la valeur propre 0 pour g .
 Soit e_2 un vecteur unitaire tel que $e_2 \in \text{Im}(g)$.
 Montrer que $g(e_2) \neq 0$.
 On pose $e_3 = \frac{g(e_2)}{\|g(e_2)\|}$.
 Montrer que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- (e) Écrire la matrice de f dans \mathcal{C} .

2 Exercices de niveau 2

902.5

Mines-Ponts

On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres.

- (a) Montrer que, pour tout $X \in E, \langle AX, X \rangle \leq \lambda_n \|X\|^2$.
- (b) *Autres questions du style :*
 Montrer que :

$$\lambda_k = \min_{F \in V_k} \left(\max_{\substack{X \in F \\ \|X\|=1}} \langle AX, X \rangle \right)$$

où V_k est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k .

902.6

Centrale

Soit $I_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Soit $\varphi : (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

- (a) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- (b) On admet que $I_0 = I_2 = 1$ et $I_1 = 0$ et $n = 2$ dans cette question.
 Déterminer une b.o.n. (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ pour φ .
- (c) Montrer qu'il existe une b.o.n. (P_0, \dots, P_n) de $\mathbb{R}_n[X]$ pour φ , échelonnée en degrés.

902.7

Centrale

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On veut montrer :

$$A^\top A = B^\top B \iff \exists U \in O_n(\mathbb{R}), B = UA$$

- (a) a1. On suppose B inversible. Montrer le résultat.
- a2. Application : résoudre l'équation $X^T X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (b) On suppose $A^T A = B^T B$.
 - b1. Montrer que $\text{Ker } A = \text{Ker } B$ puis que $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. On note r ce nombre.
 - b2. Montrer que les valeurs propres de $A^T A = B^T B$ sont positives. On les note :

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$$
 - b3. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ de \mathbb{R}^n telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, A^T A \epsilon_i = \lambda_i \epsilon_i$$
 - b4. On pose, pour $i \in \{1, \dots, r\}$, $e_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A \epsilon_i$. Montrer que (e_1, \dots, e_r) est une base orthonormée de $\text{Im}(A)$.
 - b5. Montrer qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B = UA$.

902.8

Mines-Ponts

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On se propose de montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telles que :

$$A = P^T P \text{ et } B = P^T D P$$

- (a) Montrer qu'il existe $R \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = R^T R$.
- (b) Conclure qu'il existe P et D solutions du problème posé.

3 Exercices de niveau 3

902.9

X

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de valeurs propres : $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.
 On pose : $E = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \|X\| = \|Y\| = 1 \text{ et } \langle X, Y \rangle = 0\}$.
 Montrer que : $\lambda_n - \lambda_1 = 2 \sup_{(X,Y) \in E} |X^T S Y|$.

4 Exercices de la banque CC-INP

39, 63, 76 à 82, 92