

**1 Exercices de niveau 1**

**902.1**

*ccINP*

Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que :

$$M^2 + M = J$$

où  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Déterminer les valeurs propres de  $J$ . En déduire les valeurs propres éventuelles de  $M$ .
- (b) Trouver un polynôme annulateur de  $M$ . Montrer que  $M$  est diagonalisable.
- (c) Déterminer les matrices  $M$  solutions.

**902.2**

*Mines-Télécom*

On munit l'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  du produit scalaire canonique. Calculer la distance de la matrice  $M = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$  à l'espace  $F$  des matrices de trace nulle.

**902.3**

*Mines-Télécom*

On munit  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

On pose  $e_0 : t \mapsto 1$ ,  $e_1 : t \mapsto t$  et  $F = \text{Vect}(e_0, e_1)$ . Calculer la distance de  $e_2 : t \mapsto t^2$  à  $F$ .

**902.4**

*Mines-Télécom*

Soit  $p, q \in \mathbb{N}^*$ , et  $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ .

- (a) Montrer que, pour tout  $\lambda \neq 0$  :

$$\lambda \in \text{Sp}(MM^T) \iff \lambda \in \text{Sp}(M^T M)$$

- (b) Montrer que, pour  $\lambda \neq 0$ , les dimensions des espaces propres de  $MM^T$  et  $M^T M$  sont les mêmes.
- (c) Relier les polynômes caractéristiques de  $MM^T$  et de  $M^T M$ .

**902.5**

*ccINP*

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de son produit scalaire canonique.

- (a) Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires orthogonaux.

- (b) Déterminer la distance de  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  à  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ .

**902.6**

*ccINP*

On munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique, et on fixe  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

- (a) On pose  $H_v = I_n - 2 \frac{v^T v}{\|v\|^2}$ . Montrer que  $H_v \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

- (b) Quelle est la nature de l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $H_v$  ?
- (c) Soit  $x, y \in \mathbb{R}^n$  non nuls et de même norme.
  - c1. Montrer que les vecteurs  $x - y$  et  $x + y$  sont orthogonaux.
  - c2. Montrer qu'il existe  $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que  $Vx = y$ .

**902.7**

ccINP

On munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$  et  $w$  celui associé à  $A^\top$ .

- (a) Montrer que :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, w(y) \rangle$$

- (b) Montrer que, si un sous-espace  $F$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $w$ .

- (c) On choisit ici  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- c1. Calculer  $\chi_A$ . Les matrices  $A^\top$  et  $A$  sont-elles diagonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?
- c2. Déterminer les sous-espaces stables par  $u$ .

**902.8**

cc-INP

On note  $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Pour  $X, Y \in E$ , on définit  $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$ .

- (a) Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire.
- (b) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :  $\text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^\top)$ .
- (c) Soit  $Y \in E$ . On note  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$   
 $X \mapsto \|AX - Y\|$

Montrer que  $f(X) = \inf_{Z \in E} (f(Z))$  si et seulement si  $A^\top(AX - Y) = 0$ .

**902.9**

cc-INP

Pour  $f, g \in E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ , on note  $\phi(f, g) = \int_0^1 fg + f'g'$ .

- (a) Montrer que  $\phi$  est un produit scalaire sur  $E$ .
- (b) On note  $F = \{f \in E, f(1) = f(0) = 0\}$  et  $G = \{f \in E, f'' = f\}$ . Montrer que  $F \oplus G = E$ .
- (c) Pour  $a, b \in [0, 1]$ , on pose  $E_{a,b} = \{f \in E, f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$ .
  - c1. Trouver un élément  $f_0$  dans  $E_{a,b}$ , puis montrer que  $E_{a,b} = \{f_0 + f, f \in F\}$ .
  - c2. Trouver le projeté orthogonal de  $f_0$  sur  $G$ .

- (d) *et une autre question non traitée. Peut-être :* En déduire  $\inf_{h \in E_{a,b}} \int_0^1 h^2 + h'^2$ .

*Examinateur qui n'intervient que rarement et pose des questions sur le cours.*

**902.10**

Mines-Télécom

Soit  $f$  un endomorphisme bijectif dans  $E$  euclidien, tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$$

- (a) Montrer que  $f(x)$  et  $x$  sont orthogonaux.
- (b) Montrer que  $s = f \circ f$  est autoadjoint.
- (c) Soit  $a$  une valeur propre de  $s$  et  $V_a$  son espace propre associé. On fixe  $x \in V_a \setminus \{0\}$ .
  - c1. Montrer que :  $\langle s(x), x \rangle = a\|x\|^2 = -\|f(x)\|^2$  et en déduire que  $a < 0$ .
  - c2. Montrer que  $F = \text{Vect}(x, f(x))$  et  $F^\perp$  sont stables par  $f$ .
- (d) *et d'autres questions...*

*Examinateur assez maniaque qui n'hésite pas à couper pendant les explications, il veut aller vite. Lorsqu'on est bloqué, il nous fait passer à la question suivante.*

**902.11**

cc-INP

$\mathbb{R}^3$  est muni de son produit scalaire canonique  $\langle | \rangle$  et de sa norme euclidienne associée  $\| \cdot \|$ .  
 On appelle endomorphisme stabilisant un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}^3, \langle f(x)|x \rangle = \|x\|^2$ .

- (a) Soit  $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  dont la matrice dans la base canonique est  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .  
 Montrer que  $h$  est stabilisant.
- (b) b1. Soit  $f$  un endomorphisme stabilisant différent de  $\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ . On pose  $g = f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ .  
 Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^3, \langle g(x)|x \rangle = 0$ .  
 b2. Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de  $g$ .  
 En étudiant le degré de  $\chi_g$ , montrer que 0 est valeur propre de  $g$ .
- (c) c1. Montrer que  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle x|g(y) \rangle + \langle g(x)|y \rangle = 0$ .  
 c2. Montrer que  $\text{Im}(g)$  et  $\text{Ker}(g)$  sont orthogonaux.
- (d) Soit  $e_1$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$  associé à la valeur propre 0 pour  $g$ .  
 Soit  $e_2$  un vecteur unitaire tel que  $e_2 \in \text{Im}(g)$ .  
 Montrer que  $g(e_2) \neq 0$ .  
 On pose  $e_3 = \frac{g(e_2)}{\|g(e_2)\|}$ .  
 Montrer que  $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (e) Écrire la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{C}$ .

**2 Exercices de niveau 2**

**902.12**

Mines-Ponts

- (a) Montrer que  $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

Soit  $n \geq 2$ .

- (b) On note  $P = \sum_{i=1}^n a_i X^i$  le projeté orthogonal de  $-1$  sur  $\text{Vect}(X^i)_{1 \leq i \leq n}$ .  
 Montrer que, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$  :

$$1 + \sum_{i=1}^n a_i (k+1)(k+2) \dots (k+i) = 0$$

puis exprimer  $a_i$ .

(c) En déduire :

$$\inf_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 + a_1 t + \dots + a_n t^n)^2 dt$$

Interrogateur sympa, qui parle souvent. Il donne de bonnes indications sans spoiler la manière de résoudre le problème.

**902.13**

Mines-Ponts

- (a) Soit  $U, V \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et en déduire que  $\text{tr}(UV) \geq 0$ .
- (b) Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dérivable et  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer que  $\alpha : t \mapsto \text{tr} P(f(t))$  est dérivable et calculer  $\alpha'$ .
- (c) Soit  $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telles que  $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer que :

$$\text{tr}(\exp(A)) \leq \text{tr}(\exp(B))$$

**902.14**

Mines-Ponts

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $S$  la sphère unité de  $E$ . Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ ,  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $G_k$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E$  qui sont de dimension  $k$ . On note  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  les valeurs propres de  $u$ .

(a) On considère l'ensemble :

$$A = \{ \langle u(x), x \rangle, x \in V \cap S \}$$

Montrer qu'il admet un maximum et un minimum.

(b) Montrer que :

$$\min_{x \in E} \langle u(x), x \rangle = \min_{V \in G_k} \left( \max_{x \in V \cap S} \langle u(x), x \rangle \right)$$

L'examinateur était sympa. Il laisse faire et aide lorsque l'on bloque. Au bout de 30 minutes, il m'arrête pour passer à l'exo 2 en m'expliquant l'idée pour la solution de ce que je n'ai pas eu le temps de finir.

**902.15**

Centrale 1

- (a) a1. Énoncer le théorème spectral.
- a2. Donner la définition de  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et démontrer :

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$$

- (b) b1. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\varphi : \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $U \mapsto \text{tr}(M^T U)$

Montrer que  $\varphi$  admet un maximum.

Dans la suite du sujet, on considère  $U_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  tel que  $\varphi(U_0) = \max_{U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi(U)$ .

- b2. Soit  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $t \mapsto \varphi(\exp(tA)U_0)$

Montrer que  $\psi$  est bien définie, dérivable en 0 et donner deux expressions de  $\psi'(0)$ .

(c) Montrer que  $MU_0^{-1} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Qu'en déduire ?

On écrit directement sur le mur, qui fait tableau. Mais c'est très dur à effacer à la fin, même avec du produit.

**902.16**

Mines-Ponts

On note  $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  muni de son produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On considère  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  ses valeurs propres.

- (a) Montrer que, pour tout  $X \in E$ ,  $\langle AX, X \rangle \leq \lambda_n \|X\|^2$ .
- (b) Montrer que :

$$\lambda_k = \text{Min}_{F \in V_k} \left( \text{Max}_{\substack{X \in F \\ \|X\|=1}} \langle AX, X \rangle \right)$$

où  $V_k$  est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension  $k$ .

**902.17**

Centrale

Soit  $I_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

Soit  $\varphi : (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

- (a) Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- (b) On admet que  $I_0 = I_2 = 1$  et  $I_1 = 0$  et  $n = 2$  dans cette question.  
Déterminer une b.o.n.  $(P_0, P_1, P_2)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  pour  $\varphi$ .
- (c) Montrer qu'il existe une b.o.n.  $(P_0, \dots, P_n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  pour  $\varphi$ , échelonnée en degrés.

**902.18**

Centrale

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On veut montrer :

$$A^\top A = B^\top B \iff \exists U \in O_n(\mathbb{R}), B = UA$$

- (a) a1. On suppose  $B$  inversible. Montrer le résultat.  
a2. Application : résoudre l'équation  $X^\top X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- (b) On suppose  $A^\top A = B^\top B$ .  
b1. Montrer que  $\text{Ker } A = \text{Ker } B$  puis que  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ . On note  $r$  ce nombre.  
b2. Montrer que les valeurs propres de  $A^\top A = B^\top B$  sont positives. On les note :

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

- b3. Montrer qu'il existe une base orthonormée  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, A^\top A \epsilon_i = \lambda_i \epsilon_i$$

- b4. On pose, pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $e_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A \epsilon_i$ . Montrer que  $(e_1, \dots, e_r)$  est une base orthonormée de  $\text{Im}(A)$ .
- b5. Montrer qu'il existe  $U \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $B = UA$ .

**902.19**

Mines-Ponts

Soit  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . On se propose de montrer qu'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $D$  diagonale réelle telles que :

$$A = P^\top P \text{ et } B = P^\top D P$$

- (a) Montrer qu'il existe  $R \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = R^\top R$ .
- (b) Conclure qu'il existe  $P$  et  $D$  solutions du problème posé.

**3 Exercices de niveau 3****902.20**

X

(a) Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .Montrer que  $A$  est définie-positive si et seulement si, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\det((a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}) > 0$ .(b) On pose  $A_k = (t^{|i-j|})_{1 \leq i,j \leq k}$  où  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . Calculer  $\det(A_k)$ .

(c) On pose :

$$A = \left( \frac{1}{1 + |i - j|} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Démontrer que  $A$  est symétrique définie positive.**902.21**

X

Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ , muni de  $\| \cdot \|_\infty$ . Déterminer les formes linéaires continues  $\varphi$  sur  $E$  telles que, pour tout  $f, g \in E$  :

$$\varphi(fg) = 0 \implies \varphi(f) = 0 \text{ ou } \varphi(g) = 0$$

**902.22**

X

Soit  $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique de valeurs propres :  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ .On pose :  $E = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \|X\| = \|Y\| = 1 \text{ et } \langle X, Y \rangle = 0\}$ .Montrer que :  $\lambda_n - \lambda_1 = 2 \sup_{(X,Y) \in E} |X^\top SY|$ .**4 Exercices de la banque CC-INP**

39, 63, 76 à 82, 92