1 Exercices de niveau 1

903.1

cc-INP

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$.

(a) Justifier que E est un espace vectoriel.

(b) On note $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que N est un norme.

(c) Montrer que, pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$:

$$\mathrm{e}^x f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t (f(t) + f'(t))\,\mathrm{d}t$$

(d) On note $N'(f) = \|f + f'\|_\infty$. Montrer que N' est une norme.

(e) Montrer qu'il existe α et β strictement positifs tels que, pour tout $f \in E$:

$$\alpha N'(f) \leqslant N(f) \leqslant \beta N'(f)$$

Examinateur cordial, qui laisse avancer et revient plus tard sur des points mal abordés.

903.2

cc-INP

On note E l'ensemble des suites complexes n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls, et $\varphi\ :\ E \to \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\varphi\ :\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}$$

Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on pose :

$$\|u\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ et } \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.

(b) Montrer que φ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, et calculer $\|\varphi\|_{\mathrm{op}}$.

On admet que $\|\cdot\|_1$ est une norme.

(c) Montrer que φ est continue pour la norme $\|\cdot\|_1$, et calculer $\|\varphi\|_{\mathrm{op}}$.

(d) Déterminer une norme sur E pour laquelle φ n'est pas continue.

2 Exercices de niveau 2

903.3

Mines-Ponts

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi P(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Que peut-on en déduire sur P ?

903.4

Mines-Ponts

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $\varphi\ :\ E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. Montrer que φ est continue si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi$ est une partie fermée de E.

903.5

Centrale 1

(a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire et de degré $n \geqslant 1$. Démontrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |\operatorname{Im} z|^n \leqslant |P(z)|$$

(b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont unitaires, de degré n et scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $\mathcal{U}_n$ est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{T}_n$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

903.6

Mines-Ponts

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $S(A)$ sa classe de similitude : $S(A) = \{P^{-1}AP,\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $S(A)$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3 Exercices de niveau 3

903.7

ÉNS

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de E vérifiant :

$$\exists C > 0,\ \forall f \in F,\ \|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_2$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire défini par :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F est de dimension finie, et que cette dimension est inférieure à C^2.

903.8

ÉNS

Soit $\Big(E_p, \|\cdot\|_p\Big)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces vectoriels normés et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, X_p une partie compacte de E_p.
On considère, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une suite $(x_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de X_p.

(a) Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Démontrer que l'application :

$$\psi\ :\ n \mapsto \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$$

est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

(b) Construire par récurrence une suite $(\varphi_n)_n$ d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ ainsi qu'un élément $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\prod\limits_{p\in\mathbb{N}} X_p$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k,\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_k(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a_k$$

(c) Démontrer alors, avec les notations de la première question, que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$x_{k,\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a_k$$

(d) **Application :** soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ une suite sommable. On note :

$$X_\alpha = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}),\ foralln \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant \alpha_n\}$$

Montrer que X_α est une partie compacte de $\ell^1(\mathbb{N})$.

4 Exercices de la banque CC-INP

13, 34 à 41, 44, 45, 54, 61