# 1 Exercices de niveau 1

**903.1**

*ccINP*

On note $E = \mathbb{C}[X]$ et, pour $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$, $\|P\| = \operatorname{Sup}_{k \geqslant 0} |a_k|$.

(a) Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme de $E$.

(b) Soit $b \in \mathbb{C}$. on souhaite étudier la continuité de l'application :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{C} \\ P & \mapsto & P(b) \end{array}$$

b1. Montrer que, si $|b| < 1$, alors $f$ est continue.

b2. Étudier la continuité de $f$ lorsque $|b| = 1$ à l'aide des polynômes $P_n = \sum_{k=0}^{n} \overline{b}^k X^k$.

b3. Montrer que, si $|b| > 1$, alors $f$ n'est pas continue.

**903.2**

*Mines-Télécom*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $(a^n A^n)_n$ converge.

L'examinateur était souriant mais j'ai eu l'impression qu'il essayait de me piéger.

Pour l'exercice 2 j'ai directement reconnu une matrice symétrique que j'ai proposé de diagonaliser. Il m'a demandé de rédiger la récurrence de $(PDP^\top)^n = PD^n P^\top$ et de justifier que la convergence de $(D_n)_n$ était équivalente à celle de $(A_n)_n$. Je me suis embourbé dans une justification par la norme qui était fausse et quand j'ai prononcé la sous_multiplicativité de la norme 2 il m'a regardé droit dans les yeux et me demandant si j'étais sûr que cette norme était sous_multiplicative. J'ai répondu que oui et il m'a demandé de le démontrer. L'oral s'est fini sans que j'ai pu terminer l'exercice.

**903.3**

*Mines-Télécom*

Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

Déterminer des conditions sur $u_0$, $v_0$ et $w_0$ pour qu'il y ait convergence des trois suites.

Examinateur silencieux. Il se contente seulement d'acquiescer.

**903.4**

*Mines-Télécom*

(a) $\mathbb{Z}$ est-il une partie fermée de $\mathbb{R}$ ?

(b) Qu'en est-il de $\mathbb{Q}$ ? Justifier.

**903.5**

*cc-INP*

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$.

(a) Justifier que $E$ est un espace vectoriel.

(b) On note $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que $N$ est un norme.

(c) Montrer que, pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$ :

$$\mathrm{e}^x f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t (f(t) + f'(t))\,\mathrm{d}t$$

(d) On note $N'(f) = \|f + f'\|_\infty$. Montrer que $N'$ est une norme.

(e) Montrer qu'il existe $\alpha$ et $\beta$ strictement positifs tels que, pour tout $f \in E$ :

$$\alpha N'(f) \leqslant N(f) \leqslant \beta N'(f)$$

*Examinateur cordial, qui laisse avancer et revient plus tard sur des points mal abordés.*

**903.6**

*cc-INP*

On note $E$ l'ensemble des suites complexes n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls, et $\varphi : E \to \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\varphi : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}$$

Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on pose :

$$\|u\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ et } \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $E$.

(b) Montrer que $\varphi$ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, et calculer $\|\varphi\|_{\mathrm{op}}$.

On admet que $\|\cdot\|_1$ est une norme.

(c) Montrer que $\varphi$ est continue pour la norme $\|\cdot\|_1$, et calculer $\|\varphi\|_{\mathrm{op}}$.

(d) Déterminer une norme sur $E$ pour laquelle $\varphi$ n'est pas continue.

## 2 Exercices de niveau 2

**903.7**

*Mines-Ponts*

On définit $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ et, pour $n \geqslant 2$ :

$$(E_n) \quad \tan(y) = 2n \tan\left(\frac{y}{2n}\right)$$

(a) Montre que $(E_n)$ admet au moins $(n-1)$ solutions sur $]0, n\pi[$.

(b) En utilisant $(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^{2n}$, déterminer $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\tan(2nt) = \frac{A(\tan t)}{B(\tan t)}$$

pour tout $t$ où tout est bien défini.

(c) Mettre en évidence un polynôme $P$ tel que, dans l'intervalle $]0, n\pi[$, les solutions de $(E_n)$ soient les solutions de :

$$P\left(\frac{1}{\tan^2(y/2n)}\right) = 0$$

(d) Dénombrer les solutions de $(E_n)$ dans $]0, n\pi[$.

(e) Des questions ensuite sur $\tan x_n = x_n$, et déterminer si la série $\sum \frac{1}{x_n^2}$ converge.

**903.8**

*Mines-Ponts*

Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie, et $f : E \to E$ continue. On dit que $f$ est **propre** si, pour tout compact $K$, $f^{-1}(K)$ est un compact.

(a) Soit $f$ propre. Montrer que l'image d'un fermé par $f$ est un fermé.

(b) Montrer que $f$ est propre si et seulement si $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$.

(c) Une application propre est-elle toujours continue ?

Examinateur qui demande de tout écrire même si on a justifié à l'oral.

**903.9**

*Centrale 1*

(a) Donner une CNS pour que $P \in \mathbb{C}[X]$ soit scindé simple.

(b) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, et $P = X^3 + aX + b$, donner une CNS sur $a, b$ pour que $P$ soit scindé simple dans $\mathbb{R}$.

(c) On note $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y^2 = P(x)\}$, où $P$ est le polynôme de la question précédente. Donner une CNS pour que $\Gamma$ soit connexe par arc.

**903.10**

*Mines-Ponts*

Soit $G$ un sous-groupe borné de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $G \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{I_n\}$.

**903.11**

*Mines-Ponts*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, que l'on munit de la norme infinie. On note $\mathcal{Z}_p$ l'ensemble des éléments de $E$ qui s'annulent en au moins $p$ points.

(a) Montrer que $\mathcal{Z}_1$ est fermé dans $E$.

(b) Déterminer l'adhérence de $\mathcal{Z}_p$ pour n'importe quel $p$ dans $\mathbb{N}^*$.

**903.12**

*Mines-Ponts*

Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Déterminer l'intérieur, l'adhérence et les composantes connexes par arcs de l'ensemble des matrices de rang $r$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**903.13**

*Mines-Ponts*

On considère l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Cet ensembles est-il ouvert ? Fermé ?

**903.14**

*Mines-Ponts*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la restriction de $f$ à un cercle de rayon strictement positif n'est pas injectif.

**903.15**

*Mines-Ponts*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $e^{2i\pi P(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Que peut-on en déduire sur $P$ ?

**903.16**

*Mines-Ponts*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $\varphi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. Montrer que $\varphi$ est continue si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi$ est une partie fermée de $E$.

**903.17**

*Centrale 1*

(a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire et de degré $n \geqslant 1$. Démontrer que $P$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si :
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |\operatorname{Im} z|^n \leqslant |P(z)|$$

(b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont unitaires, de degré $n$ et scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $\mathcal{U}_n$ est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{T}_n$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**903.18**

*Mines-Ponts*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $S(A)$ sa classe de similitude : $S(A) = \{P^{-1}AP,\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$
Montrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si $S(A)$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

## 3 Exercices de niveau 3

**903.19**

*ÉNS*

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ vérifiant :

$$\exists C > 0,\ \forall f \in F,\ \|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_2$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire défini par :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $F$ est de dimension finie, et que cette dimension est inférieure à $C^2$.

**903.20**

*ÉNS*

Soit $\Big(E_p, \|\cdot\|_p\Big)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces vectoriels normés et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $X_p$ une partie compacte de $E_p$. On considère, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une suite $(x_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $X_p$.

(a) Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Démontrer que l'application :

$$\psi\ :\ n \mapsto \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$$

est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

(b) Construire par récurrence une suite $(\varphi_n)_n$ d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ ainsi qu'un élément $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\prod_{p\in\mathbb{N}} X_p$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k,\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_k(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a_k$$

(c) Démontrer alors, avec les notations de la première question, que pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$x_{k,\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a_k$$

(d) **Application :** soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ une suite sommable. On note :

$$X_\alpha = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}),\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant \alpha_n\}$$

Montrer que $X_\alpha$ est une partie compacte de $\ell^1(\mathbb{N})$.

# 4 Exercices de la banque CC-INP

**13, 34 à 41, 44, 45, 54, 61**