1 Exercices de niveau 1

904.1

cc-INP

Soit $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } u_{n+1} = \sin(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

(b) Montrer que $\sum u_n^3$ converge. On pourra utiliser $u_{n+1} - u_n$.

(c) Étudier la convergence de $\sum u_n^2$. On pourra utiliser $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

904.2

Mines-Télécom

On note $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

(a) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $a_n = \gamma + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)$.

(b) On note :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$$

Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$.

(d) Montrer que la suite $\left(\ln(u_n\sqrt{n})\right)_n$ converge.

904.3

cc-INP

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels qui converge vers 0.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n\ :\ x \in \mathbb{R} \mapsto a_n \sin(nx)$.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R} \iff \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

(b) On pose, $\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$ et $T_0(x) = 0$.

b1. Calculer $T_n(x)$.
Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{2p\pi /\, p \in \mathbb{Z}\},\ |T_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{|\sin(x/2)|}$.

b2. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (a_n - a_{n+1})T_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

(c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$; on pose $S_N\ :\ x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{N} u_k(x)$.

Montrer que $S_N(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1})T_k(x) + a_N T_N(x)$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

904.4

IMT

On pose $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$, $v_n = \ln(u_n)$.

(a) Vérifier que $\forall n \geqslant 1,\ v_n$ existe.

(b) Déterminer la limite de (v_n).

(c) En déduire la limite de (u_n).

904.5

Mines-Télécom

On note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n\,n!}$$

(a) Montrer que $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ sont adjacentes.

(b) En déduire que $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n!}\right)$.

(c) Étudier la série de terme général $\sin(\pi\,\mathrm{e}\,n!)$.

Examinatrice très désagréable. Elle force à écrire sans prendre le temps de réfléchir, ce qui mène à des erreurs bidon.

904.6

CCP

(a) Soit $a_n = \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}$. Montrer que $\sum a_n$ converge.

(b) Soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $H_{2n+1} - H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.

(c) Déterminer a, b, c tels que $a_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.

(d) Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

2 Exercices de niveau 2

904.7

Mines-Ponts

Soit $\sigma\ :\ \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Démontrer la convergence de la série :

$$\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$$

Indication : on pourra commencer par majorer les « paquets » $\displaystyle\sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \frac{1}{k\sigma(k)}$.

904.8

Centrale

(a) Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère le polynôme :

$$P_n = \prod_{i=0}^{n} (X - i)$$

(b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, P_n' possède une unique racine x_n dans l'intervalle $]0, 1[$.

(c) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$\frac{P_n'(x)}{P_n(x)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x - i}$$

On note $f_n(x)$ cette expression.

(d) Étudier les variations de f_n sur $]0, 1[$, puis en déduire que la suite $(x_n)_n$ est strictement décroissante, et qu'elle converge vers 0.

On note $H_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

(e) Encadrer $\dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{x_n - 1}$ à l'aide de H_{n-1} et de H_n. En déduire un équivalent simple de x_n.

904.9

Mines-Ponts

On considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$x_n \leqslant \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n+1})$$

Démontrer que cette suite est convergente.
Indication : on pourra commencer par montrer que la suite $(y_n)_n$ où $y_n = x_{n+1} - x_n$ converge vers 0.

904.10

Mines-Ponts

Étudier la suite $(x_n)_n$ définie par :

$$x_0 \geqslant 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x_n \sin t}\, \mathrm{d}t$$

904.11

Centrale

Soit u définie par $\begin{cases} u_0 = \alpha > 0 \\ \forall n,\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n \end{cases}$

(a) Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

(b) On pose $\forall n,\ v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$; montrer que (v_n) converge vers un certain β.

(c) Montrer que $|v_n - \beta| = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

(d) Déterminer un équivalent de u_n.

904.12

Mines-Ponts

Soit (u_n) une suite positive et décroissante.

(a) Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(b) Qu'en est-il de la réciproque ?

(c) On pose $\forall n,\ v_n = n(u_{n+1} - u_n)$ et on suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$?

904.13

Centrale 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

(a) Montrer que la suite $(I_n)_n$ converge, et déterminer sa limite.

(b) Établir une relation entre I_{n+1} et I_n.

(c) Étudier selon la valeur de α la suite $(v_n)_n$, où $v_n = \ln(n^\alpha I_n)$.

(d) Montrer que $\displaystyle\sum \frac{I_n}{n}$ converge, et calculer sa somme.

904.14

Mines-Ponts

Sans préparation.
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k}$$

Examinateur très courtois, mais difficile à suivre car il avait une manière très particulière de s'exprimer.

904.15

Mines-Ponts

(a) Existence et valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t - \operatorname{Arctan} t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

(b) Existence et valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n+1)}$.

Examinateur sympathique, mais qui parle très doucement.

3 Exercices de la banque CC-INP

13, 34 à 41, 43 à 45, 54, 61