

1 Exercices de niveau 1**905.1**

ccINP

Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ définie sur $]0, +\infty[$, et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

- Montrer que S est définie sur $]0, +\infty[$.
- Calculer $S(1)$. Montrer que $xS(x) = \frac{1}{e} + S(x+1)$.
- Montrer que $S(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$ en 0^+ .
- Montrer que S est de classe \mathcal{C}^∞ .

L'interrogateur n'intervenait quasiment pas. Il était tout de même assez sympathique.

905.2

Mines-Télécom

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = 0$$

Rappeler le théorème de Weierstrass. Prouver que f est nulle.

905.3

Mines-Télécom

Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

905.4

cc-INP

On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x + n}$.

- Montrer que S est définie sur \mathbb{R}_+^* .
- Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 .
- Trouver un équivalent de S en $+\infty$.
- Une autre question dont je ne me souviens pas.*

905.5

cc-INP

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose $\forall n \geq 0, \forall x \in [0, 1], u_n(x) = a_n x^n (1-x)$.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], 0 \leq u_n(x) \leq a_n x^n (1-x)$.
Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

- On pose $\forall x \in [0, 1], u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Calculer $u(x)$ lorsque $\forall n, a_n = 1$, puis $a_n = \frac{1}{n}$, puis $a_n = \frac{1}{2^n n!}$.

- (c) c1. On pose $\forall n, x_n = \frac{n}{n+1}$. Donner un équivalent simple de $x_n^n(1-x_n)$.
- c2. Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, 1] \iff \sum \frac{a_n}{n}$ converge.
- (d) On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x)$. Montrer que $0 \leq R_n(x) \leq a_{n+1}$.
- (e) Déterminer une CNS pour que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

905.6

cc-INP

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$.

- (a) Étudier la convergence de $\sum u_n$.
- (b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$.

L'examinateur était passif tout au long du passage et répondait à toute question par : «c'est à vous de décider comment mener votre oral». J'ai décidé d'admettre la première question pour résoudre la seconde.

905.7

Mines-Télécom

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$.

On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (b) Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .
- (c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.
- (d) Déduire le graphe de f .

905.8

cc-INP

On note : $f : t \mapsto e^t \ln(t)$.

- (a) Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$.
- (b) Montrer que :

$$\int_0^1 e^t \ln(t) dt = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!n}$$

Ca s'est parfaitement passé, j'ai réussi sans indication, heureusement que je connaissais mon cours.

905.9

Mines-Télécom

On note :

$$f_n :]n, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-k}$$

- (a) Montrer que f_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.
- (b) Déterminer les limites de f_n en n^+ et en $+\infty$.
- (c) Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.
 - c1. Montrer qu'il existe un unique x_n tel que $f_n(x_n) = A$.
 - c2. Déterminer la limite de $(x_n)_n$ si elle existe.
 - c3. Calculer $f_n(n+1)$ et déterminer sa limite en $+\infty$.
 - c4. Montrer qu'il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $x_n \geq n+1$.
 - c5. *et d'autres questions.*

905.10

cc-INP

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(x+n) + \varphi(x-n)$.

- (a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- (b) Montrer que f est 1-périodique.
- (c) On considère $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et 1-périodique. Montrer que φg est intégrable sur \mathbb{R} et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

2 Exercices de niveau 2

905.11

Centrale 1 Pour $n \geq 1$, on pose :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{n} \right)$$

et $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

- (a) Montrer que f est bien définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . La convergence est-elle uniforme sur \mathbb{R}_+ ?
- (b) Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- (c) Donner un équivalent de f' en $+\infty$.

905.12

Centrale 1

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum a_n$ converge. On note :

$$S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \left(\frac{x}{n} \right)$$

On suppose que S a une limite réelle ℓ en $+\infty$. On souhaite montrer que la suite $(a_n)_n$ est nulle.

- (a) a1. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange à un ordre quelconque.
- a2. Montrer que S est bien définie sur \mathbb{R} .
- (b) On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge absolument et que $\ell = 0$.
 - b1. Montrer que S est continue.
 - b2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$I : T \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T S(x) \cos\left(\frac{x}{m}\right) dx$$
 Montrer que $\lim_{T \rightarrow +\infty} I(T) = 0$.
 - b3. Montrer que $a_m = 0$.
- (c) Montrer le cas général.

905.13

Centrale

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$f_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t)^2 dt$$

- (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$:

$$f_n(x) \leq \frac{1}{1-x}$$

- (b) Démontrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, 1[$.

On note f la limite simple de cette suite de fonctions.

- (c) Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, a]$:

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{2}{1-a}\right)^n$$

- (d) En déduire la continuité de f sur $[0, 1[$.
- (e) Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t)^2 dt$$

- (f) En déduire l'expression de f sur $[0, 1[$.

905.14

Centrale

Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

- (a) Étudier le domaine de définition et la continuité sur $]0, +\infty[$ de la fonction :

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

- (b) Démontrer que, pour tout $x > 0$, $\sum \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ converge.

(c) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

(d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j!} \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

(e) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x > 0$:

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} - e \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!(x+k)} = - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!(x+k)} \left(\sum_{j=N-k+1}^{+\infty} \frac{1}{j!} \right)$$

(f) En déduire que, pour tout $x > 0$:

$$S(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

905.15

Mines-Ponts

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0$$

(a) Montrer que la fonction f est nulle.

(b) Calculer :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x} dx$$

(c) En déduire qu'il existe f dans $\mathcal{C}([0, +\infty[), \mathbb{R})$, non identiquement nulle, telle que :

$$\int_0^{+\infty} x^n f(x) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

905.16

Mines-Ponts

(a) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

(b) On note, pour $a > 0$:

$$f_a :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(1 - \frac{a}{x}\right)^x$$

b1. • Justifier la définition et la croissance de f_a sur son ensemble de définition.

• Quelle est la limite de $f_a(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$?

b2. On note, pour $n \geq 1$: $I_n = \int_0^n f_t(n) \ln(t) dt$.

Démontrer l'existence de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

(c) c1. Montrer, en justifiant l'existence des quantités étudiées, que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$$

c2. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt = -\gamma$.

905.17

Centrale 1

On définit $(u_n)_{n \geq 0}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 1], u_0(x) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], u_{n+1}(x) = x + \int_0^1 \sin(xy)u_n(y) dy \end{cases}$$

(a) Montrer qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$0 \leq \frac{1 - \cos x}{x} \leq k$$

(b) Montrer que, pour tout n , u_n est bien définie et continue sur $[0, 1]$.

(c) Démontrer, en travaillant sur $\sum (u_{n+1} - u_n)$, que $(u_n)_n$ converge uniformément.

(d) *une autre question*

Examinateur calme et rigoureux. Laisse chercher et se tromper avant de corriger.

905.18

Centrale 1

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que $a_n = O_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^2})$. On définit la série d'applications :

$$\sum_{n \geq 1} a_n \sin(n \cdot)$$

(a) Montrer la convergence simple de cette série.

(b) On note $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nt)$. Montrer que f est continue.

(c) Déterminer l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin(nt)$$

(d) Déterminer l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = f(t)$$

On cherchera à exprimer les solutions sous forme de somme de série.

(e) Les solutions sont-elles 2π -périodiques ?

3 Exercices de la banque CC-INP

8 à 12, 14 à 19, 27, 48, 53