1 Exercices de niveau 1

906.1

Mines-Télécom

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon infini.

(a) Montrer que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n a^n$$

(b) Une autre question non traitée.

906.2

Mines-Télécom

On considère

$$(E)\ :\ 4xy'' + 2y' - y = 0$$

(a) a1. Déterminer les solutions développables en série entière : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

a2. Exprimer ces solutions à l'aide des fonctions usuelles.

(b) On souhaite résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.

b1. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions ?

b2. Résoudre (E) en posant $x = t^2$.

b3. Résoudre le problème de Cauchy avec $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$

J'ai réussi mes deux exos sans indication, l'interrogateur était un monsieur très sympa, avenant, à l'écoute et très attentif à tout ce que je disais. J'ai eu 20/20, donc ça s'est plutôt bien passé !

906.3

cc-INP

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0 \quad (H)$$

On cherche les solutions développables en séries entières sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on note r le rayon de convergence.

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et donner f' et f''.

(b) Déterminer $(b_n)_n$ telle que :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$$

(c) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par $(a_n)_n$.

(d) *Question non traitée.*
On peut demander : Expliciter les solutions de (H) qui sont développables en série entière et préciser le rayon de convergence.
Résoudre (H) par la méthode de Lagrange.

906.4

Mines-Télécom

On définit :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$$

(a) Déterminer un équivalent de H_n. En déduire le rayon de convergence de f, noté R.

(b) Pour $x \in]-R, R[$, déterminer $f(x)$.

906.5

cc-INP

Soit $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \dfrac{\text{ch}(n)}{n}$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

(b) Calculer sa somme.

906.6

cc-INP

(a) Étude de la convergence simple de $(f_n)_n$ où $f_n\ :\ x \mapsto \dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.

(b) Étude de la convergence uniforme en s'aidant de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

906.7

CC-INP

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de :

$$\sum_{n \geqslant 1} n^{(-1)^n} x^n$$

2 Exercices de niveau 2

906.8

Centrale

(a) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$. On note f la somme de cette série entière, et on dit qu'une telle fonction est une **fonction entière**.

(b) Soit ω un complexe tel que $|\omega| < 1$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k\theta}}{1 - \omega\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \omega^k$$

(c) Soit $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Montrer que, pour tout $z \in D(a, R)$:

$$f(z) = \int_0^1 f\big(a + R\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\theta}\big)\frac{R\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\theta}}{a + R\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\theta} - z}\,\mathrm{d}\theta$$

(d) En déduire l'existence d'une suite $(\alpha_n)_n$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - a)^n$$

(e) En déduire que si f n'est pas identiquement nulle, alors il existe une fonction entière g et un entier naturel m tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = (z - a)^m g(z) \text{ et } g(a) \neq 0$$

(f) Conclure que, si f n'est pas identiquement nulle, alors pour tout compact K de $\mathbb{C}$:

$$\{z \in K,\ f(z) = 0\} \text{ est fini}$$

906.9

Mines-Ponts

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\, t^n\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que $(u_n)_n$ est bien définie. Préciser ses variations et sa limite pour $n \to +\infty$.

(b) Calculer $u_{n+1} + u_n$. En déduire un équivalent de u_n.

(c) On note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de S.

Examinateur sympathique qui donne quelques indices lorsqu'on bloque.

906.10

Mines-Ponts

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
Domaine de définition de f et expression de $f(x)$.

906.11

Mines-Ponts

Soit $\alpha > 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \dfrac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}$.

(a) Trouver le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

(b) Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha}\mathrm{e}^x$.

906.12

Mines-Ponts et Centrale

Pour $n \geqslant 1$, on note D_n le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ sans point fixe et on convient que $D_0 = 1$. On note :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$$

et R le rayon de convergence de cette série entière.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.

(b) Montrer que $R \geqslant 1$.

(c) Calculer $\mathrm{e}^x S(x)$ puis déterminer D_n.

(d) Trouver un équivalent de D_n.

906.13

Mines-Ponts

On note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

(a) Calculer le rayon de convergence R de la série entière, puis étudier la convergence en $\pm R$.

(b) Déterminer la limite en 1 de $(1-x)f(x)$.

906.14

Mines-Ponts

On pose :

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n) x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$$

(a) Déterminer les rayons de convergence R_f et R_g.

(b) Montrer que g est définie et continue sur $[-1, 1[$.

(c) Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ sur $]-1, 1[$.

(d) Montrer que f peut-être prolongée par continuité en une fonction continue sur $[-1, 1[$.

(e) Trouver un équivalent de g et f en 1.

15 min de préparation pour 25 min de passage, puis 20 min sur exercice sans préparation. Examinateur extrêmement bienveillant, il mettait en confiance.

906.15

Centrale

Soit $\sum a_n$ une série convergente de somme S. On suppose $S \neq 0$ et on note $(S_n)_n$ la suite de ses sommes partielles.

(a) Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^n$$

(b) Montrer que $f' = g' - g$.

(c) En déduire que :

$$\int_0^x f(u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = (g(x) - f(x))\mathrm{e}^{-x}$$

(d) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

3 Exercices de la banque CC-INP

2, 20 à 24, 51