

**1 Exercices de niveau 1****906.1***Mines-Télécom*

Pour  $x \neq 0$ , on pose  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ .

- (a)  $f$  est-elle prolongeable par continuité en 0 ?  
 (b)  $f$  est-elle  $\mathcal{C}^1$  ?  
 (c) Que peut-on trouver d'autre ?

*J'ai dit  $\mathcal{C}^k$ , il répond que c'est dur. Je propose Leibniz, et il, non. Fin.*

**906.2***cc-INP*

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , on note  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x}$ .

- (a) a1. Justifier que  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0.  
 a2. Déterminer cette série entière.  
 a3. Justifier son rayon de convergence.  
 (b) On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$(1+x)y' + (2+x)y = 0 \quad (E)$$

- b1. Montrer que  $f$  est solution de (E) sur  $]-1, +\infty[$ .  
 b2. Si  $\sum a_n x^n$  est solution de l'équation (E), déterminer une relation de récurrence satisfaite par les  $a_n$ .  
 b3. *Autres questions.*

*Complète avec l'exercice 112 de la banque. Examinateur très silencieux, qui fait remarquer quand il y a un erreur, et vers la fin pousse à aller plus vite pour faire le plus possible.*

**906.3***Mines-Télécom*

Soit  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  une série entière de rayon infini.

- (a) Montrer que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt = a_n r^n$$

- (b) *Une autre question non traitée.*

**906.4***Mines-Télécom*

On considère

$$(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$$

- (a) a1. Déterminer les solutions développables en série entière :  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , et montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

- a2. Exprimer ces solutions à l'aide des fonctions usuelles.
- (b) On souhaite résoudre (E) sur  $]0, +\infty[$ .
- b1. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions ?
- b2. Résoudre (E) en posant  $x = t^2$ .
- b3. Résoudre le problème de Cauchy avec  $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$

*J'ai réussi mes deux exos sans indication. L'interrogateur était un monsieur très sympa, avenant, à l'écoute et très attentif à tout ce que je disais. J'ai eu 20/20, donc ça s'est plutôt bien passé!*

**906.5**

cc-INP

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0 \quad (H)$$

On cherche les solutions développables en séries entières sous la forme  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et on note  $r$  le rayon de convergence.

- (a) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et donner  $f'$  et  $f''$ .
- (b) Déterminer  $(b_n)_n$  telle que :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$$

- (c) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par  $(a_n)_n$ .
- (d) *Question non traitée.*  
*On peut demander :* Expliciter les solutions de (H) qui sont développables en série entière et préciser le rayon de convergence.  
 Résoudre (H) par la méthode de Lagrange.

**906.6**

Mines-Télécom

On définit :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ et } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$$

- (a) Déterminer un équivalent de  $H_n$ . En déduire le rayon de convergence de  $f$ , noté  $R$ .
- (b) Pour  $x \in ]-R, R[$ , déterminer  $f(x)$ .

**906.7**

cc-INP

Soit  $\forall n \geq 1, a_n = \frac{\text{ch}(n)}{n}$ .

- (a) Déterminer le rayon de convergence de  $\sum a_n x^n$ .
- (b) Calculer sa somme.

**906.8**

cc-INP

- (a) Étude de la convergence simple de  $(f_n)_n$  où  $f_n : x \mapsto \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$ .
- (b) Étude de la convergence uniforme en s'aidant de  $\int_0^1 f_n(x) dx$ .

**906.9**

CC-INP

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de :

$$\sum_{n \geq 1} n^{(-1)^n} x^n$$

## 2 Exercices de niveau 2

**906.10**

Centrale 1

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique,  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ .

- (a) Donner la définition du produit de Cauchy de deux séries entières et donner une minoration de son rayon de convergence.
- (b) On définit les assertions :
- (i)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  a un rayon de convergence de 1.
  - (ii)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n x^n$  a un rayon de convergence de 1.
- b1. Montrer que (i)  $\implies$  (ii).
- b2. Que penser de la réciproque ?
- (c) Montrer que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{A_n}{n!} z^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} z^n$  ont le même rayon de convergence.

**906.11**

Centrale 1

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $u_n$  la somme des chiffres de l'écriture binaire de  $n$ . On pose :

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$$

- (a) Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue et décroissante. Montrer que :

$$\sum f(n) \text{ et } \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

sont de même nature.

- (b) Donner le rayon de convergence  $R$  de  $\sum u_n x^n$ .
- (c) Donner une relation vérifiée par  $S(x^2)$  et  $S(x)$ .
- (d) Exprimer  $(1 - x)S(x)$  sous forme d'une somme, puis donner un équivalent de  $S$  en  $R^-$ .

**906.12**

Centrale 1

- (a) Démontrer le théorème d'interversion série-intégrale sous convergence uniforme sur un segment.
- (b) Soit  $f : x \mapsto \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2\sqrt{x} \sin(t)} dt$ . Montrer que  $f$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}_+$ .
- (c) Donner un équivalent en  $+\infty$  de  $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$

**906.13**

Centrale

- (a) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe telle que la série entière  $\sum a_n z^n$  a pour rayon de convergence  $+\infty$ . On note  $f$  la somme de cette série entière, et on dit qu'une telle fonction est une **fonction entière**.

- (b) Soit  $\omega$  un complexe tel que  $|\omega| < 1$ . Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\int_0^1 \frac{e^{2i\pi k\theta}}{1 - \omega e^{-2i\pi\theta}} d\theta = \omega^k$$

- (c) Soit  $a \in \mathbb{C}$  et  $R > 0$ . Montrer que, pour tout  $z \in D(a, R)$  :

$$f(z) = \int_0^1 f(a + R e^{2i\pi\theta}) \frac{R e^{2i\pi\theta}}{a + R e^{2i\pi\theta} - z} d\theta$$

- (d) En déduire l'existence d'une suite  $(\alpha_n)_n$  telle que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z - a)^n$$

- (e) En déduire que si  $f$  n'est pas identiquement nulle, alors il existe une fonction entière  $g$  et un entier naturel  $m$  tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (z - a)^m g(z) \text{ et } g(a) \neq 0$$

- (f) Conclure que, si  $f$  n'est pas identiquement nulle, alors pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{C}$  :

$$\{z \in K, f(z) = 0\} \text{ est fini}$$

**906.14**

Mines-Ponts

On définit, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} t^n dt$$

- (a) Montrer que  $(u_n)_n$  est bien définie. Préciser ses variations et sa limite pour  $n \rightarrow +\infty$ .

(b) Calculer  $u_{n+1} + u_n$ . En déduire un équivalent de  $u_n$ .

(c) On note  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ . Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de  $S$ .

*Examinateur sympathique qui donne quelques indices lorsqu'on bloque.*

**906.15**

*Mines-Ponts*

Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ .

Domaine de définition de  $f$  et expression de  $f(x)$ .

**906.16**

*Mines-Ponts*

Soit  $\alpha > 1$  et  $\forall n \geq 1$ ,  $a_n = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}$ .

(a) Trouver le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ . On pose  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ .

(b) Montrer que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha}e^x$ .

**906.17**

*Mines-Ponts et Centrale*

Pour  $n \geq 1$ , on note  $D_n$  le nombre de permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  sans point fixe et on convient que  $D_0 = 1$ . On note :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$$

et  $R$  le rayon de convergence de cette série entière.

(a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$ .

(b) Montrer que  $R \geq 1$ .

(c) Calculer  $e^x S(x)$  puis déterminer  $D_n$ .

(d) Trouver un équivalent de  $D_n$ .

**906.18**

*Mines-Ponts*

On note  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ .

(a) Calculer le rayon de convergence  $R$  de la série entière, puis étudier la convergence en  $\pm R$ .

(b) Déterminer la limite en 1 de  $(1-x)f(x)$ .

**906.19**

*Mines-Ponts*

On pose :

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n)x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$$

- (a) Déterminer les rayons de convergence  $R_f$  et  $R_g$ .
- (b) Montrer que  $g$  est définie et continue sur  $[-1, 1[$ .
- (c) Trouver une relation entre  $(1-x)f(x)$  et  $g(x)$  sur  $] -1, 1[$ .
- (d) Montrer que  $f$  peut-être prolongée par continuité en une fonction continue sur  $[-1, 1[$ .
- (e) Trouver un équivalent de  $g$  et  $f$  en 1.

15 min de préparation pour 25 min de passage, puis 20 min sur exercice sans préparation. Examinateur extrêmement bienveillant, il mettait en confiance.

**906.20**

Centrale

Soit  $\sum a_n$  une série convergente de somme  $S$ . On suppose  $S \neq 0$  et on note  $(S_n)_n$  la suite de ses sommes partielles.

- (a) Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^n$$

- (b) Montrer que  $f' = g' - g$ .

- (c) En déduire que :

$$\int_0^x f(u)e^{-u} du = (g(x) - f(x))e^{-x}$$

- (d) Calculer  $\int_0^{+\infty} f(u)e^{-u} du$ .

### 3 Exercices de la banque CC-INP

2, 20 à 24, 51