1 Exercices de niveau 1

908.1

cc-INP

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0 \qquad (E)$$

(a) Observer qu'il existe deux solutions très simples solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

(b) Résoudre (E) sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

(c) Déterminer les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$.

(d) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
À quelle condition existe-t-il une solution définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant la condition initiale $\begin{cases} y(1) = \alpha \\ y'(1) = \beta \end{cases}$?

908.2

Mines-Télécom

Résoudre sur $]0, \pi[$ l'équation différentielle :

$$y'' + y = \mathrm{cotan}(x)$$

908.3

cc-INP

On pose $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2$ qui vérifient $y''(t) + q(t)y(t) = 0$ avec q une fonction T-périodique. Soit $y_1,\ y_2$ dans $\mathcal{S}$ telles que $y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0,\ y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1$. On admet que $\mathcal{B} = (y_1, y_2)$ est une base de $\mathcal{S}$.

(a) Trouver $\mathcal{S}$ dans le cas où q est la fonction constante égale à 1. Montrer que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ = ens. des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Pour y dans $\mathcal{S}$, on pose $\forall t \in \mathbb{R},\ f(y)(t) = y(t+T)$.

b1. Montrer que $f(y) \in \mathcal{S}$, puis que f est un endomorphisme de $\mathcal{S}$.

b2. Montrer que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}$

(c) c1. On pose $\forall t \in \mathbb{R},\ W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$. Montrer que W est constante égale à 1.

c2. Montrer que $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}\,(A)X + 1$.

(d) On suppose maintenant que $|\mathrm{tr}\,(A)| < 2$. Montrer que A a deux valeurs propres complexes conjuguées de module 1. Montrer que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(e) On suppose $|\mathrm{tr}\,(A)| = 2$. Montrer que $\mathcal{S}$ possède des solutions bornées.

2 Exercices de niveau 2

908.4

Mines-Ponts

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathcal{E}_A$ l'équation différentielle d'inconnue $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C}))$:

$$Y' = AY$$

Démontrer que toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de $\mathcal{E}_A$ sont bornées si et seulement si A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$.

908.5

Mines-Ponts

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathcal{E}_A$ l'équation différentielle d'inconnue $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C}))$:

$$Y' = AY$$

Que peut-on dire de A si toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de $\mathcal{E}_A$ sont 1-périodiques ?

908.6

Centrale

Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-^*$ une fonction continue et strictement négative. On s'intéresse aux solutions sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle :

$$y'' + qy = 0 \quad (\mathcal{E}_q)$$

(a) Énoncer le théorème de Cauchy-linéaire appliqué à cette équation différentielle.

On note y_1 la solution sur $\mathbb{R}_+$ de $(\mathcal{E}_q)$ vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$.

(b) Démontrer que la fonction y_1 est strictement positive, strictement croissante et convexe sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Démontrer que la fonction $\dfrac{1}{y_1^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(d) Démontrer que la fonction définie par :

$$y_2(x) = y_1(x) \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{y_1^2(t)} \qquad \forall x \geqslant 0$$

est une solution de $(\mathcal{E}_q)$.

(e) Est-ce que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions ?

(f) Étudier les variations de y_2. En déduire que y_2 possède une limite finie en $+\infty$.

(g) Parmi les solutions sur $\mathbb{R}_+$ de $(\mathcal{E}_q)$, quelles sont celles qui sont bornées ?

(h) On suppose maintenant que q est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $y_2'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

908.7

Mines-Ponts

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$.

(a) Démontrer que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\exp(B) - \exp(A) = \int_0^1 \exp(tB)(B-1)\exp\big((1-t)A\big)\,\mathrm{d}t$$

(b) On admet pour l'instant que, pour tout $R > 0$ et tout $X, Y \in \overline{B}(0, R)$:

$$\|\exp(X) - \exp(Y)\| \leqslant \mathrm{e}^R \|X - Y\|$$

Démontrer que exp est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que, pour $A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{d}(\exp)(A)(H) = \int_0^1 \exp(tA) H \exp\big((1-t)A\big)\,\mathrm{d}t$$

(c) Démontrer la propriété admise à la question précédente.

908.8

Centrale

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$. On considère Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.

(a) Rappeler la définition de « Ω est ouvert ».

(b) Soit $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|h\| < r$. On définit :

$$\varphi \,:\, \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a + th) \end{array}$$

Expliquer pourquoi φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, et exprimer φ' et φ'' en fonction des dérivées partielles de f et des coordonnées $h_1, \ldots, h_n$ de h.

(c) On suppose que, pour tout $x \in B(a, r)$, $f(x) \leqslant f(a)$.
Que vaut $\varphi'(0)$? Démontrer que $\varphi''(x) \leqslant 0$.

(d) En déduire que la Hessienne :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$$

est symétrique négative.
Que peut-on dire du laplacien $\Delta f(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a)$ de f en a ?

(e) On suppose de plus que, pour tout $x \in \Omega$, $\Delta f(x) \geqslant f(x)$ et qu'il existe $a \in \Omega$ tel que $f(a) = \underset{x \in \Omega}{\mathrm{Max}}\, f(x)$.
Démontrer que $f \leqslant 0$ sur Ω.

On suppose maintenant que Ω est un ouvert borné et non vide de $\mathbb{R}^n$. On note $\partial\Omega$ la frontière de Ω. On considère une fonction $f \,:\, \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ qui vérifie les hypothèses suivantes :

$$(i)\ f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$$
$$(ii)\ f_{|\Omega} \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$$
$$(iii)\ \forall x \in \Omega,\ \Delta f(x) = 0$$

On se propose de démontrer que :

$$\underset{x \in \overline{\Omega}}{\mathrm{Sup}}\, f(x) = \underset{x \in \partial\Omega}{\mathrm{Sup}}\, f(x)$$

(a) Pourquoi f est-elle bornée sur $\overline{\Omega}$?

(b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$f_p \,:\, \begin{array}{rcl} \overline{\Omega} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + \frac{1}{p}\|x\|^2 \end{array}$$

Calculer Δf_p sur Ω. En déduire que $\underset{x \in \overline{\Omega}}{\mathrm{Sup}}\, f_p(x)$ ne peut pas être atteinte en un point de Ω.

(c) Conclure que : $\underset{x \in \overline{\Omega}}{\mathrm{Sup}}\, f(x) = \underset{x \in \partial\Omega}{\mathrm{Sup}}\, f(x)$.

908.9

Mines-Ponts

(a) Rechercher les solutions développables en série entière de :

$$2xy'(x) + y(x) = 3x\varphi(x) \text{ avec } \varphi(x) = \begin{cases} \cos(x^{3/2}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{ch}((-x)^{3/2}) & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et tracer l'allure de ses solutions.

Examinatrice qui n'a pas envie d'être là, qui ne veut pas aider et qui souffle très fort à chaque fois qu'on écrit quelque chose (juste ou faux).

908.10

Centrale 1

Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 en $+\infty$. On considère l'équation :

$$(E) \;:\; y' + 3y = g$$

(a) On admet provisoirement que

$$\mathrm{e}^{-3x} \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Montrer que, si f est solution de (E), alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

(b) Démontrer le résultat admis précédemment.

(c) On suppose maintenant que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de f solution de (E) ?

(d) *et d'autres questions.*

Examinateur qui dessinait pendant mes explications.

908.11

Mines-Ponts

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'' + y' + y = \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

(b) Montrer que $f \;:\; x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'' + y' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

908.12

Mines-Ponts

Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^3$ de $f \;:\; (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

3 Exercices de la banque CC-INP

3, 4, 31 à 33, 41, 42, 52, 56 à 58