

**1 Exercices de niveau 1****908.1***ccINP*(a) Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .a1. Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de  $f$  en  $(0, 0)$ .a2. Donner la définition de «  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$  ».(b) On considère  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .b2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .**908.2***Mines-Télécom*

On considère :

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 1\}$$

et :

$$f : (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$$

Montrer que  $f$  atteint un maximum et un minimum sur  $K$  et les déterminer.**908.3***ccINP*On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $f, g$  définies sur  $\mathbb{R}^n$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \langle u(x), x \rangle \text{ et } g(x) = \|x\|^2 - 1$$

(a) On pose  $K = g^{-1}(\{0\})$ . Montrer que  $K$  est compact.(b) Montrer que  $f|_K$  admet un maximum en  $a \in K$ .(c) Montrer que  $g$  est différentiable et calculer sa différentielle et son gradient en tout point.(d) Montrer que  $f$  est différentiable et calculer sa différentielle et son gradient en tout point.(e) Montrer que  $a$  est un vecteur propre de  $u$ .**908.4***cc-INP*

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$(x - 1)y'' - xy' + y = 0 \quad (E)$$

(a) Observer qu'il existe deux solutions très simples solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .(b) Résoudre  $(E)$  sur  $]-\infty, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$ .(c) Déterminer les solutions de  $(E)$  définies sur  $\mathbb{R}$ .(d) Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .À quelle condition existe-t-il une solution définie sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant la condition initiale  $\begin{cases} y(1) = \alpha \\ y'(1) = \beta \end{cases}$  ?

**908.5***Mines-Télécom*

- (a) Exprimer, sur l'intervalle  $]0, \pi[$ , la dérivée de  $x \mapsto \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right)$ .
- (b) Résoudre sur  $]0, \pi[$  l'équation différentielle :

$$y'' + y = \cotan(x)$$

**908.6***cc-INP*

On pose  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions  $\mathcal{C}^2$  qui vérifient  $y''(t) + q(t)y(t) = 0$  avec  $q$  une fonction  $T$ -périodique. Soit  $y_1, y_2$  dans  $\mathcal{S}$  telles que  $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$ . On admet pour l'instant que  $\mathcal{B} = (y_1, y_2)$  est une base de  $\mathcal{S}$ .

- (a) Trouver  $\mathcal{S}$  dans le cas où  $q$  est la fonction constante égale à 1. Montrer que  $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  où  $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est l'ensemble des fonctions bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
- (b) Pour  $y$  dans  $\mathcal{S}$ , on pose  $\forall t \in \mathbb{R}, f(y)(t) = y(t + T)$ .
- b1. Montrer que  $f(y) \in \mathcal{S}$ , puis que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{S}$ .
- b2. Montrer que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}$
- (c) c1. Montrer que, sur  $\mathbb{R}$ , le wronskien de  $(y_1, y_2)$  est constant égal à 1.  
c2. En déduire le résultat admis :  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{S}$ .  
c3. Montrer que  $\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + 1$ .
- (d) On suppose maintenant que  $|\text{tr}(A)| < 2$ . Montrer que  $A$  a deux valeurs propres complexes conjuguées de module 1. Montrer que  $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- (e) On suppose  $|\text{tr}(A)| = 2$ . Montrer que  $\mathcal{S}$  possède des solutions bornées.

## 2 Exercices de niveau 2

**908.7***Mines-Ponts*

- (a) Calculer la différentielle de la fonction  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  en  $I_n$ .
- (b) Montrer, de deux façons différentes, que  $\det$  n'atteint pas d'extremum local en  $I_n$ .
- (c) Que peut-on dire d'un éventuel extremum local de la fonction  $\det$  ?
- (d) On fixe  $r \in \{1, \dots, n-1\}$ . Expliciter une matrice simple de rang  $r$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La fonction  $\det$  y atteint-elle un extremum local ?
- (e) Conclure.

**908.8***Mines-Ponts*

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On note  $H_f(x)$  la matrice hessienne de  $f$  au point  $x$ .

- (a) Montrer que, si  $H_f(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \langle a, x \rangle + b$$

(b) Montrer que, si la fonction  $x \mapsto H_f(x)$  est constante sur  $\mathbb{R}^n$ , il existe  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \frac{1}{2} \langle u(x), x \rangle + \langle a, x \rangle + b$$

**908.9***Mines-Ponts*

(a) Soit  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Montrer que  $f$  est convexe si et seulement si :

$$\forall x \in U, H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

où  $H_f(x)$  désigne la matrice hessienne de  $f$  en  $x$ .

(b) Fixons  $p \in \mathbb{R}_+^*$ . On définit :

$$f : (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mapsto \left( \sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p}$$

À quelle condition la fonction  $f$  est-elle convexe ?

**908.10***Mines-Ponts*

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .

(a) Montrer que, pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$  :

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

(b) On pose  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  et :

$$D = \{ \phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \forall f, g \in E, \phi(fg) = f(0)\phi(g) + g(0)\phi(f) \}$$

Montrer que  $D$  est de dimension finie, et calculer sa dimension.

**908.11***Mines-Ponts*

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $\mathcal{E}_A$  l'équation différentielle d'inconnue  $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C}))$  :

$$Y' = AY$$

Démontrer que toutes les solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $\mathcal{E}_A$  sont bornées si et seulement si  $A$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$ .

**908.12***Mines-Ponts*

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $\mathcal{E}_A$  l'équation différentielle d'inconnue  $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C}))$  :

$$Y' = AY$$

Que peut-on dire de  $A$  si toutes les solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $\mathcal{E}_A$  sont 1-périodiques ?

**908.13***Centrale*

Soit  $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction continue et strictement négative. On s'intéresse aux solutions sur  $\mathbb{R}_+$  de l'équation différentielle :

$$y'' + qy = 0 \quad (\mathcal{E}_q)$$

(a) Énoncer le théorème de Cauchy-linéaire appliqué à cette équation différentielle.

On note  $y_1$  la solution sur  $\mathbb{R}_+$  de  $(\mathcal{E}_q)$  vérifiant  $y(0) = y'(0) = 1$ .

(b) Démontrer que la fonction  $y_1$  est strictement positive, strictement croissante et convexe sur  $\mathbb{R}_+$ .

(c) Démontrer que la fonction  $\frac{1}{y_1^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

(d) Démontrer que la fonction définie par :

$$y_2(x) = y_1(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{y_1^2(t)} \quad \forall x \geq 0$$

est une solution de  $(\mathcal{E}_q)$ .

(e) Est-ce que  $(y_1, y_2)$  est un système fondamental de solutions ?

(f) Étudier les variations de  $y_2$ . En déduire que  $y_2$  possède une limite finie en  $+\infty$ .

(g) Parmi les solutions sur  $\mathbb{R}_+$  de  $(\mathcal{E}_q)$ , quelles sont celles qui sont bornées ?

(h) On suppose maintenant que  $q$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ . Démontrer que  $y_2'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

**908.14**

Mines-Ponts

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  d'une norme d'algèbre  $\| \cdot \|$ .

(a) Démontrer que, pour tout  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

$$\exp(B) - \exp(A) = \int_0^1 \exp(tB)(B - A) \exp((1 - t)A) dt$$

(b) On admet pour l'instant que, pour tout  $R > 0$  et tout  $X, Y \in \overline{B}(0, R)$  :

$$\| \exp(X) - \exp(Y) \| \leq e^R \| X - Y \|$$

Démontrer que  $\exp$  est différentiable sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que, pour  $A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

$$d(\exp)(A)(H) = \int_0^1 \exp(tA)H \exp((1 - t)A) dt$$

(c) Démontrer la propriété admise à la question précédente.

**908.15**

Centrale

On munit  $\mathbb{R}^n$  d'une norme  $\| \cdot \|$ . On considère  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in \Omega$  et  $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ .

(a) Rappeler la définition de «  $\Omega$  est ouvert ».

(b) Soit  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset \Omega$  et  $h \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|h\| < r$ . On définit :

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a + th) \end{aligned}$$

Expliquer pourquoi  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$ , et exprimer  $\varphi'$  et  $\varphi''$  en fonction des dérivées partielles de  $f$  et des coordonnées  $h_1, \dots, h_n$  de  $h$ .

(c) On suppose que, pour tout  $x \in B(a, r)$ ,  $f(x) \leq f(a)$ . Que vaut  $\varphi'(0)$ ? Démontrer que  $\varphi''(0) \leq 0$ .

(d) En déduire que la Hessienne :

$$H_f(a) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$$

est symétrique négative.

Que peut-on dire du laplacien  $\Delta f(a) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a)$  de  $f$  en  $a$  ?

(e) On suppose de plus que, pour tout  $x \in \Omega$ ,  $\Delta f(x) \geq f(x)$  et qu'il existe  $a \in \Omega$  tel que  $f(a) = \max_{x \in \Omega} f(x)$ .  
Démontrer que  $f \leq 0$  sur  $\Omega$ .

On suppose maintenant que  $\Omega$  est un ouvert borné et non vide de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\partial\Omega$  la frontière de  $\Omega$ . On considère une fonction  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie les hypothèses suivantes :

- (i)  $f \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$
- (ii)  $f|_{\Omega} \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$
- (iii)  $\forall x \in \Omega, \Delta f(x) = 0$

On se propose de démontrer que :

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} f(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} f(x)$$

(a) Pourquoi  $f$  est-elle bornée sur  $\bar{\Omega}$  ?

(b) Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on définit :

$$f_p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + \frac{1}{p} \|x\|^2$$

Calculer  $\Delta f_p$  sur  $\Omega$ . En déduire que  $\sup_{x \in \bar{\Omega}} f_p(x)$  ne peut pas être atteinte en un point de  $\Omega$ .

(c) Conclure que :  $\sup_{x \in \bar{\Omega}} f(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} f(x)$ .

**908.16**

Centrale 1

Soit  $g$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui tend vers 0 en  $+\infty$ . On considère l'équation :

$$(E) : y' + 3y = g$$

(a) On admet provisoirement que

$$e^{-3x} \int_0^x g(t)e^{3t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Montrer que, si  $f$  est solution de (E), alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

(b) Démontrer le résultat admis précédemment.

(c) On suppose maintenant que  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$ . Que peut-on dire de  $f$  solution de (E) ?

(d) et d'autres questions.

*Examinateur qui dessinait pendant mes explications.*

**908.17**

Mines-Ponts

(a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$y'' + y' + y = \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

(b) Montrer que  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

(c) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$y'' + y' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

**908.18***Mines-Ponts*

Déterminer les extremums sur  $\mathbb{R}^3$  de  $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ .

**3 Exercices de niveau 3****908.19***ÉNS PLSR*

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

(a) On suppose que  $f'' + f' + f \xrightarrow{+\infty} 0$ . Montrer que  $f \xrightarrow{+\infty} 0$ .

(b) Soit  $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{C}[X]$  unitaire de degré 1 ou 2 et à racines simples dans  $\mathbb{C}$ . On pose  $\partial_P f = \sum_{k=0}^2 a_k f^{(k)}$ . Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $P$  pour que, pour tout  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,  $\partial_P f \xrightarrow{+\infty} 0$  implique  $f \xrightarrow{+\infty} 0$ .

(c) Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\forall x, y, z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \begin{cases} x' + ax + by + cz \xrightarrow{+\infty} 0 \\ y' + ax + by + cz \xrightarrow{+\infty} 0 \\ z' + ax + by + cz \xrightarrow{+\infty} 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x \xrightarrow{+\infty} 0 \\ y \xrightarrow{+\infty} 0 \\ z \xrightarrow{+\infty} 0 \end{cases}$$

**908.20***ÉNS L*

Soit  $A$  une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et  $X$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A(t)X(t) - X(t)A(t)$$

Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X(t)$  et  $X(0)$  sont semblables.

**908.21***X*

Trouver les  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que  $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$ .

**4 Exercices de la banque CC-INP**

3, 4, 31 à 33, 41, 42, 52, 56 à 58