1 Exercices de niveau 1

909.1

Mines-Télécom

Justifer l'existence et calculer :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

909.2

cc-INP

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]0, +\infty[$.

(c) Déterminer des constantes a et b telles que :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\right) = a\frac{t}{1+t^2} + b\frac{t}{1+x^2t^2}$$

(d) Déterminer $f'(x)$ et calculer cette intégrale.

(e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

909.3

Mines-Télécom

On s'intéresse à : $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$

(a) Déterminer D_f.

(b) Étudier la continuité de f.

(c) Montrer que $f(x) = f(1-x)$.

(d) Déterminer un équivalent en 0.

909.4

cc-INP

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que (H_n) est croissante. Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n$?

Soit $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u}\mathrm{d}u$.

(b) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que F est croissante.

(c) Calculer, pour tout $x \geqslant 0,\ F(x+1) - F(x)$. En déduire l'expression de $F(n)$ en fonction de H_n.

(d) Montrer que, $\forall x \geqslant 0,\ \ln(x+1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$.

(e) Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x+1)$.

2 Exercices de niveau 2

909.5

Centrale

On définit : $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$.

(a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ et le sens de variation de f.

(b) Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}$.

(c) Démontrer que f est développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ à préciser.
On exprimera les coefficients a_n de ce développement à l'aide de :

$$u_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1}\sqrt{t-1}}$$

(d) Donner une méthode permettant le calcul de u_n.

(e) Étudier l'existence de $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

(f) La fonction f est-elle intégrable sur $[0, 1[$? Si oui, montrer l'existence et calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}$.

909.6

Mines-Ponts

On définit : $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et déterminer leur dérivée.

(b) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$:

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$$

(c) En déduire que la valeur de :

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

909.7

Centrale

On définit, lorsque c'est possible :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

(a) Déterminer le domaine de définition de F.

(b) F est-elle continue ?

(c) Sur quel intervalle F est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$?

(d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

(e) Donner le développement en série entière de F autour de 0.

3 Exercices de la banque CC-INP

29, 30, 50