1 Exercices de niveau 1

909.1

Mines-Télécom

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f est $\mathcal{C}^n$ et $f(0) = 0$ et $g : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ f'(0) & \text{sinon} \end{cases}$.

(a) Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t$.

(b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et calculer $g^{(k)}(0)$.

909.2

Mines-Télécom

Justifer l'existence et calculer :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

909.3

cc-INP

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]0, +\infty[$.

(c) Déterminer des valeurs a et b telles que :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\right) = a\frac{t}{1+t^2} + b\frac{t}{1+x^2t^2}$$

(d) Déterminer $f'(x)$ et calculer cette intégrale.

(e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

909.4

cc-INP

On considère :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

(b) Montrer que g est dérivable et calculer sa dérivée.

(c) c1. Montrer que, pour $x \neq \pm 1$:

$$\frac{1}{((xt)^2+1)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+(xt)^2}\right)$$

c2. Montrer que, pour $x \geqslant 0$: $g(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$.

(d) Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{Arctan}\, t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

909.5

Mines-Télécom

On s'intéresse à : $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$

(a) Déterminer D_f.

(b) Étudier la continuité de f.

(c) Montrer que $f(x) = f(1-x)$.

(d) Déterminer un équivalent en 0.

909.6

cc-INP

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que (H_n) est croissante. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n$?

Soit $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u}\mathrm{d}u$.

(b) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que F est croissante.

(c) Calculer, pour tout $x \geqslant 0,\ F(x+1) - F(x)$. En déduire l'expression de $F(n)$ en fonction de H_n.

(d) Montrer que, $\forall x \geqslant 0,\ \ln(x+1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$.

(e) Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x+1)$.

2 Exercices de niveau 2

909.7

Mines-Ponts

(a) Montrer que $\varphi\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$ et $\psi\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x\sin\frac{\pi}{x}}$ sont continues sur $]1,+\infty[$.

(b) Calculer, pour $x \neq k\pi$:

$$\int_{-t}^{t} \frac{\mathrm{d}u}{u - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$$

et déterminer sa limite lorsque $t \to +\infty$.

(c) Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. Déterminer a tel que :

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = a\int_0^{+\infty} \frac{u^{q-1}}{1+u^p}\,\mathrm{d}u$$

(d) ...?

Examinateur assez stoïque, mais acquiesce les bonnes idées.

909.8

Centrale

On définit : $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$.

(a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ et le sens de variation de f.

(b) Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}$.

(c) Démontrer que f est développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ à préciser.
On exprimera les coefficients a_n de ce développement à l'aide de :

$$u_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1}\sqrt{t-1}}$$

(d) Donner une méthode permettant le calcul de u_n.

(e) Étudier l'existence de $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

(f) La fonction f est-elle intégrable sur $[0, 1[$? Si oui, montrer l'existence et calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}$.

909.9

Mines-Ponts

On définit : $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et déterminer leur dérivée.

(b) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$:

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$$

(c) En déduire que la valeur de :

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

909.10

Centrale

On définit, lorsque c'est possible :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

(a) Déterminer le domaine de définition de F.

(b) F est-elle continue ?

(c) Sur quel intervalle F est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$?

(d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

(e) Donner le développement en série entière de F autour de 0.

3 Exercices de niveau 3

909.11

ÉNS SR

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ \mathrm{e}^x & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

4 Exercices de la banque CC-INP

29, 30, 50