1 Exercices de niveau 1

910.1

Mines-Télécom

(a) Calculer le PGCD de 341 et de 220.

(b) En déduire les solutions des équations suivantes :

b1. $341u + 220v = 1$

b2. $341u + 220v = 11$

b3. $341u + 220v = 22$

910.2

Mines-Télécom

Soit $(G, \star)$ et $(G', \top)$ deux groupes, et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

(a) Montrer que, pour tout sous-groupe H de G, $f(H)$ est un sous-groupe de G'.

(b) Montrer que, pour tout sous-groupe H' de G', $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

910.3

Mines-Télécom

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Un sous-groupe H de G est dit **distingué** si :

$$\forall x \in H,\ \forall a \in G,\ axa^{-1} \in H$$

(a) Montrer que le noyau d'un morphisme de groupes au départ de G est distingué.

(b) Soit H et K deux sous-groupes de G. On suppose H distingué, et on définit :

$$HK = \{hk,\ h \in H,\ k \in K\}$$

Montrer que HK est un sous-groupe de G.

910.4

cc-INP

Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien fini.

(a) Soit x, y deux éléments de G d'ordres finis respectifs p et q supposés premiers entre eux. Montrer que $z = xy$ est d'ordre pq.

(b) On note m le ppcm des ordres des éléments de G, que l'on décompose en facteurs premiers :

$$m = p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N}$$

Montrer qu'il existe un élément x_i de G d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

(c) Montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre exactement m.

910.5

Mines-Télécom

On note :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

(a) Calculer le polynôme caractéristique de M. La matrice M est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

(b) Soit $G = \{M^k,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que G est un groupe cyclique et préciser son cardinal.

910.6

cc-INP

Soit $(G, \star)$ un groupe cyclique à n éléments engendré par a.
Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^r \end{array}$$

(a) Vérifier que f est un endomorphisme de $(G, \star)$.

(b) Déterminer le noyau de f.

(c) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est le sous-groupe de G engendré par a^d, où $d = \mathrm{pgcd}(n, r)$.

(d) Pour $y \in G$, combien l'équation $x^r = y$ possède-t-elle de solutions ?

2 Exercices de niveau 2

910.7

Centrale 1

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F_n = \prod_{\substack{\xi \in \mathbb{U}_n \\ \omega(\xi) = n}} (X - \xi)$$

où $\omega(\xi)$ est l'ordre de la racine n-ième ξ comme élément du groupe $\mathbb{C}^*$.

(a) Montrer que $\omega(\xi)$ divise n pour tout $\xi \in \mathbb{U}_n$.

(b) Exprimer $(X-1)F_n$ et F_n dans le cas où n est premier.

(c) Soit $A, B \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $AB \in \mathbb{Z}[X]$ et $A \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire. Montrer que $B \in \mathbb{Z}[X]$.

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n \in \mathbb{Z}[X]$.

(e) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(1)$.

910.8

Centrale 1

(a) Donner la définition de la signature et calculer celle de la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ et $\nu(\sigma)$ le nombre de ses points fixes.

b1. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer χ_A sous forme factorisée.

b2. En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{1 + \nu(\sigma)}$$

910.9

Centrale 1

Soit G un groupe fini d'ordre n. On appelle **caractère de** G tout morphisme de groupes χ de G vers $\mathbb{C}^*$. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G.

(a) Montrer que $\widehat{G}$ est un groupe multiplicatif, et que les éléments de $\widehat{G}$ sont à valeurs dans $\mathbb{U}_n$.

(b) Dans cette question, on suppose G cyclique. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et que $\widehat{G}$ est isomorphe à G.

(c) Dans cette question, on suppose G abélien. Montrer que, si H est un sous-groupe de G et $\xi \in \widehat{H}$, il existe $\chi \in \widehat{G}$ tel que $\chi_{|H} = \xi$.

910.10

Mines-Ponts

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Combien y a-t-il de sous-groupes de $\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +\big)$?

910.11

Centrale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

(a) Expliciter le cardinal de $\mathcal{S}_n$. Le justifier.

Pour $i \in \{2, \dots, n\}$, on note $t_i = (1, i)$

(b) Montrer que $\{t_2, t_3, \dots, t_n\}$ engendre $\mathcal{S}_n$.

Pour $s \in \mathcal{S}_n$, on note u_s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$u_s(e_i) = e_{s(i)} \ \forall i$$

(c) Interpréter géométriquement u_s lorsque s est un transposition.

(d) Soit $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$. On suppose que s est la composée de p transpositions. Montrer que $p \geqslant n-1$.

(e) Quel est le cardinal minimal d'une famille de transpositions génératrice de $\mathcal{S}_n$?

910.12

Soit p un nombre premier. On note :

$$G_p = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \exists k \in \mathbb{N},\ z^{p^k} = 1 \right\}$$

(a) Montrer que G_p est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$.

(b) Montrer que les sous-groupes propres de G_p sont cycliques et qu'aucun d'eux n'est maximal pour l'inclusion.

(c) Montrer que G_p n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments.

910.13

Mines-Ponts

On note :

$$K = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$$

(a) Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel K.

(b) Montrer que K est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

910.14

Mines-Ponts

Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de 7^{7^7} ?

910.15

Mines-Ponts

Soit G un groupe cyclique engendré par a, de cardinal n.

(a) Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique, de cardinal divisant n.

(b) Soit d un diviseur de n. Montrer que G possède un unique sous-groupe de cardinal d.

(c) Si $d \in \mathbb{N}$, on note $\varphi(d)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et d qui sont premiers avec d. Démontrer que :

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

910.16

Mines-Ponts

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini et p un nombre premier.
On suppose qu'il existe deux éléments a, b de G, d'ordre p et tels que $a \notin \mathrm{gr}(b)$.

(a) On suppose que $ab = ba$. Démontrer que G possède au moins $p^2 - 1$ éléments d'ordre p.

On ne suppose plus que a et b commutent. On pose :

$$H = \mathrm{gr}(b) \text{ et } \forall j \in [\![0, p-1]\!],\ K_j = a^j \cdot H \cdot a^{-j}$$

(b) Démontrer que, pour $j \in [\![0, p-1]\!]$, si $K_j = H$ alors $j = 0$.

(c) En déduire que, pour tout $i, j \in [\![0, p-1]\!]$, si $i \neq j$ alors $K_i \cap K_j = \{e\}$. Conclure que G contient au moins $p^2 - p$ éléments d'ordre p.

3 Exercices de niveau 3

910.17

X

(a) Montrer que tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui n'est pas monogèe est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une infinité de $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

(c) Montrer la divergence de la suite $\left(\dfrac{1}{n \sin n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

4 Exercices de la banque CC-INP

78, 84, 86, 89, 94