

**1 Exercices de niveau 1**

**911.1**

Mines-Télécom

Soit  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de lois données par :

$$P(X_k = -k^\lambda) = P(X_k = k^\lambda) = \frac{1}{2}$$

où  $\lambda \in ]0, \frac{1}{2}[$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \text{ et } Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{n}$$

- (a) Déterminer  $E(S_n)$  et  $V(S_n)$ .
- (b) Donner un équivalent de  $u_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$ , où  $\alpha > 0$ .
- (c) Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n| > \alpha)$ .

**911.2**

Mines-Télécom

On considère une suite  $(X_i)_i$  de variables aléatoires indépendantes telles que  $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ .

On définit la variable aléatoire  $S_m$  par :

$$S_m = k \iff X_1 + \dots + X_k = m \text{ et } X_1 + \dots + X_{k-1} < m$$

- (a) Déterminer la loi et la fonction génératrice de  $S_1$ .
- (b) Montrer que, pour  $m \geq 2$ ,  $S_m - S_{m-1}$  et  $S_1$  suivent la même loi.
- (c) Déterminer la fonction génératrice de  $S_m$ , puis la loi de  $S_m$ .

**911.3**

cc-INP

Soit  $X, Y$  deux va indépendantes, qui suivent la même loi, d'espérance et de variance finie, et telles que  $Z = X + Y + 1$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$ .

- (a) Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .
- (b) Déterminer  $G_X : t \mapsto E(t^X)$ .
- (c) En déduire la loi de  $X$ .

**911.4**

Mines-Télécom

Soit  $X$  une va telle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et  $P(X \geq n) > 0$  pour tout  $n$ . On note  $x_n = P(X = n | X \geq n)$ .

- (a) Montrer que :  $x_n = \frac{P(X = n)}{P(X \geq n)}$  et  $1 - x_n = \frac{P(X \geq n+1)}{P(X \geq n)}$ .
- (b) b1. Montrer que :  $P(X \geq n) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{P(X \geq k+1)}{P(X \geq k)} = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$ .  
 b2. Exprimer  $P(X = n)$  à l'aide des termes de la suite  $(x_n)_n$ .  
 b3. Montrer que  $(P(X = n))_n$  est une suite géométrique si et seulement si  $(x_n)_n$  est constante.

**911.5**

cc-INP

- (a) Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 2b \end{pmatrix}$ . Trouver une CNS sur  $a, b$  pour que  $M$  soit diagonalisable.
- (b) Soit  $X \sim \mathcal{G}(p)$ . Que vaut  $P(X > n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ?
- (c) Soit  $X, Y$  deux va indépendantes telles que  $X \sim \mathcal{G}(p_1)$  et  $Y \sim \mathcal{G}(p_2)$ . On note :  $M = \begin{pmatrix} 0 & -X \\ X & 2Y \end{pmatrix}$ .  
Quelle est la probabilité de l'événement «  $M$  est diagonalisable » ?
- (d) Même question avec  $X \sim Y \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$ .  
Quelle est la limite de cette probabilité lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

*J'ai fini cet exercice au bout d'environ 20 minutes, mais l'examinateur n'a validé que deux questions traitées sur 4.*

**911.6**

cc-INP

Soit  $p \in ]0, 1[$ . On note  $p_k = k(1-p)^{k-1}p^2$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .

- (a) Montrer que  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une distribution de probabilité.

On considère  $X$  une va dont la loi est donnée par  $(p_k)_k$ , c'est-à-dire que  $P(X = k) = p_k$  pour tout  $k$ .

- (b) Montrer l'existence et calculer l'espérance de  $X - 1$  et de  $(X - 1)(X - 2)$ .
- (c) Calculer alors  $E(X)$  puis  $V(X)$ .

*Examinateur gentil, il m'a aidé quand je bloquais et me laissait gérer mon oral tout en me signalant lorsque le temps s'écoulait trop.*

**911.7**

Mines-Télécom

On réalise des expériences aléatoires indépendantes qui ont une probabilité  $p$  de succès et  $1 - p$  d'échec. On considère la va  $T_n$  qui compte le nombre d'étapes pour obtenir  $n$  succès.

- (a) Déterminer la loi de  $T_1$ .
- (b) Déterminer la loi de  $T_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- (c) Donner le DSE de  $\frac{1}{(1-t)^n}$ .

**911.8**

cc-INP

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une Bernoulli de paramètre  $p$ .

On pose  $\forall n, Y_n = X_n X_{n+1}$ .

Déterminer la loi, l'espérance et la variance de  $Y_n$ ,  $\text{Cov}(Y_i, Y_{k+i})$  avec  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $k \in \llbracket 0, n - i \rrbracket$ .

**911.9**

cc-INP

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dispose d'une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire successivement 2 boules, sans remise.  $X$  désigne le numéro de la 1ère boule,  $Y$  celui de la 2ème.

Déterminer la loi de  $X$ , puis celle du couple  $(X, Y)$ , et enfin celle de  $Y$ .

**911.10**

cc-INP

On pose  $\forall n \geq 1, \forall k, a_{n,k} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1}$  et  $\forall n \geq 1, \forall k \geq 1, p_{n,k} = a_{n,k-1} - a_{n,k}$ .

(a) Montrer que  $\forall p \geq 1$ ,  $I_p = \int_0^{+\infty} (1 - (1 - e^{-t})^p) dt$  converge.

(b) Montrer que  $p_{n,k} \geq 0$  et  $\sum_{k=1}^{+\infty} p_{n,k} = 1$ .

On dispose alors d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et d'une variable aléatoire  $X_n$  telle que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(X_n = k) = p_{n,k}$ .

(c) c1. Montrer que  $\sum_{k \geq 0} a_{n,k}$  converge.

c2. En déduire que  $X_n$  admet une espérance et que  $E(X_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$ .

(d) On pose  $g_n : u \mapsto 1 - \left(1 - \frac{1}{2^u}\right)^{n-1}$ .

d1. Montrer que  $\sum_{k=1}^N a_{n,k} \leq \int_0^N g_n(u) du \leq \sum_{k=0}^{N-1} a_{n,k}$ .

d2. En déduire que  $E(X_n) - 1 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leq E(X_n)$ .

(e) En admettant que  $I_{n-1} \sim \ln(n)$ , trouver un équivalent simple de  $E(X_n)$ .

**911.11**

*IMT*

On dispose de deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$ , indépendantes, telles que  $X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{3})$  et  $Y \sim \mathcal{G}(\frac{2}{3})$ . On pose  $W = X + Y$ .

- (a) Trouver la variance de  $W$ .
- (b) Trouver la loi de  $W$ .

**2 Exercices de niveau 2**

**911.12**

*Mines-Ponts*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sigma$  une permutation aléatoire dans  $\mathfrak{S}_n$ . On note  $F$  la variable aléatoire qui compte le nombre de points fixes de  $\sigma$ , et  $E_i$  l'événement associé à  $\{\sigma(i) = i\}$ .

- (a) Calculer  $P(E_i)$  et  $P(E_i \cap E_j)$ .
- (b) Calculer  $E(F)$ .
- (c) Calculer  $\text{Cov}(\mathbb{1}_{E_i}, \mathbb{1}_{E_j})$  pour  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En déduire  $V(F)$ .
- (d) Montrer que  $P(F \geq 4) \leq \frac{1}{9}$ .

*Interrogateur qui aide très peu même face à une difficulté.*

**911.13**

*Mines-Ponts*

Soit  $(X_n)_n$  une suite i.i.d. de variables à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ .

On suppose que  $E(X_0) < +\infty$  et  $P(X_0 = 0) < 1$ , et on note  $R$  le rayon de convergence de la série  $\sum X_n t^n$ .

(a) Montrer que :

$$(R > 1) = (X_n = 0 \text{ à partir d'un certain rang})$$

En déduire que  $(R > 1)$  est un événement et que  $P(R > 1) = 0$ .

(b) Montrer que, si  $0 < c < 1$ ,  $P(R \leq c) = 0$ .

(c) Montrer que  $P(R = 1) = 1$ .

**911.14**

*Centrale 1*

Soit  $(X_n)_n$  une suite i.i.d. de variables suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

(a) Calculer la fonction génératrice associée à une loi de Poisson.

(b) Montrer que  $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$ .

(c) Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$P(|S_n - n\lambda| > n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

(d) Soit  $x > 0$ . Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

(e) Si  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction continue et nulle en dehors d'un segment, on pose :

$$\mathcal{L}(f) : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$$

Montrer que, pour tout  $x \geq 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} \mathcal{L}(f)^{(k)}(n) = \int_0^x f$$

**911.15**

*Mines-Ponts*

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

Soit  $(X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R})_n$  une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes, non sûrement constantes et bornées, de même loi.

Soit  $Y_0 = 1$  et  $\forall n \geq 1, Y_n = Y_{n-1}X_n$ .

On admet que les  $Y_n$  suivent la même loi.

(a) Soit  $x \in \mathbb{R} / P(X_1 = x) > 0$ .

a1. Montrer que  $P(X_1 = x^2) > 0$ .

a2. En déduire que  $|x| \leq 1$ .

a3. Montrer que  $x \in \{-1, 1\}$ .

(b) Donner la loi de  $X_1$ .

(c) Montrer que la suite  $(Y_n)$  est composée de v.a. mutuellement indépendantes.

**911.16**

Mines-Ponts

On fixe  $s \in ]1, +\infty[$ . On considère  $X$  un va avec  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et :

$$P(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s} \text{ où } \zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}$$

- (a) Calculer  $P(n|X)$  où la notation  $n|X$  signifie  $n$  divise  $X$ .  
 (b) On note  $v_p(X) = \text{Max}\{k \in \mathbb{N}, p^k | X\}$ . Déterminer la loi de  $v_p(X)$  et son espérance.

*Examinateur qui sort de la salle et qui parle moyennement français.*

**911.17**

Centrale 1

Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. supposées indépendantes telles que :

$$X^2 \sim \mathcal{G}(p) \text{ et } Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

avec  $p \in ]0, 1[$  et  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ .

On définit :

$$M = \begin{pmatrix} 2Y - 3 & -2 & -2Y + 4 \\ Y - 8X - 11 & -10 & 8X - Y + 20 \\ 2Y - 4X - 7 & -6 & 4X - 2Y + 12 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Donner une valeur propre et un vecteur propre  $U$  associé, indépendants de  $X$  et  $Y$ .  
 (b) Calculer  $MV$  et  $MW$ .  
 (c) En fonction de  $X$  et  $Y$ , définir/donner l'événement «  $M$  est diagonalisable » (dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ).  
 (d) Donner la probabilité que  $M$  soit diagonalisable.

*L'examinateur était agréable et donnait des indications pour avancer, en posant quelques questions de cours pour aider à la réflexion. Mais il ne faut pas se fier à ses impressions! Je n'ai eu que 09/20 en ayant presque fini l'exercice.*

**911.18**

Mines-Ponts

Soit  $U, V : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}$  deux v.a. discrètes indépendantes. On suppose que  $U$  et  $V$  suivent la même loi de probabilité :

$$P(U = -1) = \frac{1}{3} \text{ et } P(U = 1) = \frac{2}{3}$$

On pose  $X = U$  et  $Y = \text{signe}(U)V$ .

- (a) Montrer que  $Y$  est une v.a. discrète.  
 (b) Donner la loi de  $(X, Y)$ .  
 (c) Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?  
 (d) Les variables  $X^2$  et  $Y^2$  sont-elles indépendantes?

**911.19**

Centrale

On lance un dé équilibré à  $n$  faces, et on étudie le nombre  $T$  de lancers nécessaires pour obtenir les  $n$  faces du dé.

Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $T_k$  le nombre de lancers nécessaires depuis que l'on a obtenu  $k - 1$  faces différentes pour obtenir une nouvelle face. On a bien-sûr  $T = \sum_{k=1}^n T_k$ .

- (a) Donner l'espérance et la variance d'une v.a. qui suit une loi géométrique de paramètre  $p$ .
- (b) Déterminer la loi de la variable  $T_k$ . Que penser de la famille  $(T_k)_k$  ?
- (c) Déterminer le nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir les  $n$  faces du dé. En donner un équivalent lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .
- (d) Soit  $\alpha > 1$  fixé. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer en fonction de  $n$  la probabilité  $P(T \geq \alpha E(T))$ .
- (e) Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite d'entiers telle que, pour tout  $n$ ,  $u_n > E(T)$ . Montrer que :

$$P(T \geq u_n) \leq n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{u_n}$$

En posant  $u_n = \lceil \alpha n \ln n \rceil$  et en utilisant l'inégalité  $\ln(1+x) \leq x$  pour  $x > -1$ , qu'obtient-on comme inégalité ?

**911.20***Centrale*

Soit  $G$  un groupe fini non commutatif.

On choisit au hasard, indépendamment et avec équiprobabilité deux éléments de  $G$ . On note  $P$  la probabilité que ces deux éléments commutent.

- (a) Montrer que  $P \in ]0, 1[$ .
- (b) Calculer  $P$  lorsque  $G$  est le groupe des isométries d'un carré du plan.

On admet le théorème de Lagrange : l'ordre de tout sous-groupe d'un groupe fini divise l'ordre du groupe. En particulier, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.

On note  $Z(G)$  le centre de  $G$  et, pour  $a \in G$ ,  $\mathcal{N}_a = \{g \in G, g \cdot a = a \cdot g\}$ .

- (c) Montrer que, pour tout  $a \in G \setminus Z(G)$  :

$$\frac{\text{Card } G}{\text{Card } \mathcal{N}_a} \geq 2 \text{ et } \frac{\text{Card } \mathcal{N}_a}{\text{Card } Z(G)} \geq 2$$

puis que  $\text{Card } Z(G) \leq \frac{1}{4} \text{Card } G$ .

- (d) Montrer que la relation :

$$a \sim b \iff \exists g \in G, g \cdot a \cdot g^{-1} = b$$

est une relation d'équivalence.

On note  $\text{cl}(a)$  la classe d'équivalence de  $a$ .

- (e) Montrer que si  $a \sim b$ , alors  $\mathcal{N}_a$  et  $\mathcal{N}_b$  sont isomorphes.

- (f) Montrer que, pour  $a \in G$  :

$$(\text{Card } \mathcal{N}_a) \times (\text{Card } \text{cl}(a)) = \text{Card } G$$

- (g) Montrer que :

$$P = \frac{\text{nombre de classes d'équivalences de } \sim}{\text{Card } G}$$

- (h) Montrer que  $P \leq \frac{5}{8}$ .

- (i) Montrer que si  $P = \frac{5}{8}$ , alors  $\text{Card } G \equiv 0 [8]$ .

**3 Exercices de la banque CC-INP**

95 à 112