

922.1

Centrale II

On note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$$

- (a) Tracer F . Faire des conjectures sur son signe, son sens de variations, sa limite en $+\infty$, son domaine de définition.
- (b) Vérifier toutes les conjectures.
- (c) c1. Montrer que F vérifie une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.
c2. Montrer que F est de classe C^∞ .
- (d) d1. Montrer que $F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
d2. Déterminer la limite de F en 0.
- (e) Trouver un équivalent de F en 0.

Il y avait une erreur d'énoncé à la question 4. J'ai perdu du temps de préparation, mais pas de temps d'oral car l'examinateur l'a dit rapidement. Sinon, il était très sympathique et aidait pour la dernière question.

922.2

Centrale II

On note (E) l'équation différentielle :

$$\operatorname{sh}^5(x) y' + 2 \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}^2(x) y = \operatorname{ch}^3(x)$$

On pourra utiliser `scipy.integrate.odeint`.

- (a) a1. Quelle est la nature de cette équation différentielle ? Sur quel(s) domaine(s) l'étudier ?
a2. Résoudre l'équation homogène sur les domaines précédents.
- (b) b1. Tracer avec Python la solution vérifiant $y(1) = 1$, sur $[1, 10]$, en utilisant un pas de 0.01. Conjecturer le comportement de la solution au voisinage de 0.
b2. On souhaite vérifier la conjecture. Tracer à rebours cette solution sur $[0.1, 1]$, toujours avec un pas de 0.01.
- (c) c1. Déterminer une primitive de $t \mapsto (t-1)e^t$.
c2. Déterminer la solution sur \mathbb{R}_+^* de (E) qui satisfait la condition $y(1) = 1$.
c3. Existe-t-il une solution de (E) continue sur \mathbb{R} ?

Il y avait trois ou quatre autres questions que je n'ai pas eu le temps de lire.

922.3

Soit $n \geq 1$ un entier et $a \neq 0$ un réel. On considère la matrice carrée d'ordre n :

$$A_{n,a} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & \frac{1}{a} & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \cdots & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Écrire une fonction qui étant donné un entier $n \geq 1$ et un réel a non nul renvoie la matrice $A_{n,a}$.

(b) Donner des valeurs approchées décimales des valeurs propres de $A_{n,a}$ pour $3 \leq n \leq 8$ et a dans $\{-2, -1, 1, 2, 3\}$.

(c) Soit $(P_n)_{n \geq 1}$ la suite de polynômes définie par :

$$P_1 = X \quad P_2 = X^2 - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

- c1. Calculer les coefficients de P_3, \dots, P_8 .
- c2. Donner des valeurs approchées des racines de P_3, \dots, P_8 .
- c3. Conjecturer un lien entre P_n et $A_{n,a}$ et le démontrer.

(d) Les matrices $A_{n,a}$ sont-elles inversibles ? diagonalisables ?

(e) Trouver un segment de \mathbb{R} contenant toutes les valeurs propres de $A_{n,a}$ pour n entier et $a \in \mathbb{R}^*$.

922.4

Centrale II

Pour traiter ce sujet le candidat est invité à utiliser l'ordinateur à sa disposition, équipé de Python/Pyzo et de Scilab. Si on utilise Python, on pourra effectuer les suivants :

```
import numpy as np, numpy.linalg as alg
```

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (où n et $p \in \mathbb{N}^*$), on note A^\top la matrice transposée de A . On note également $\text{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$ et $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$, il s'agit respectivement de l'image et du noyau de l'application linéaire : $u_A : X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mapsto AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note aussi pour $D \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, les systèmes linéaires $\Sigma_{A,D} : AX = D$ et $\Sigma'_{A,D} : A^\top AX = A^\top D$; il s'agit en fait d'équations matricielles d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

A. Exemples numériques. On considère $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ et

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Afin d'alléger les notations, on note respectivement Σ_i et Σ'_i les systèmes Σ_{A_i,D_i} et Σ'_{A_i,D_i} , pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

- (a) Résoudre les systèmes Σ_i et Σ'_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$. On pourra s'aider du logiciel.
- (b) b1. Écrire une fonction `rangs(A)` qui prend en argument un tableau numpy représentant une matrice A et qui renvoie la liste de longueur 2 contenant les rangs des matrices A et $A^\top A$.
- b2. Tester la fonction précédente avec les matrices A_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Que peut-on conjecturer ?
- (c) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, comparer $\text{Ker}(A_i)$ et $\text{Ker}(A_i^\top A_i)$. Conjecture ?

Désormais, on fixe $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on note respectivement Σ et Σ' les systèmes $\Sigma_{A,D}$ et $\Sigma'_{A,D}$.

Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel défini par $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$, en identifiant les matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec leur unique coefficient et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

B. Relation entre rang de A et de $A^\top A$.

- (d) Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^\top A)$.
- (e) En déduire une relation entre le rang de A et celui de $A^\top A$.

On dit que $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est une pseudo-solution du système $\Sigma : AX = D$ lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \|AX_0 - D\| \leq \|AX - D\|$$

Enfin, on introduit $D_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le projeté orthogonal de D sur le sous-espace vectoriel $\text{Im}(A)$.

C. Existence de pseudo-solutions.

- (f) Montrer que, si $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est une solution de Σ , alors X_0 est une pseudo-solution de Σ .
- (g) Montrer que : $\forall Y \in \text{Im}(A), \|Y - D\|^2 = \|Y - D_0\|^2 + \|D_0 - D\|^2$.
- (h) Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Établir que $AX_0 = D_0$ si et seulement si X_0 est une pseudo-solution de Σ .
- (i) En déduire l'existence d'une pseudo-solution de Σ .

D. Calculs des pseudo-solutions et condition d'unicité.

- (j) Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX_0 = D_0$. Montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \langle X, A^T AX_0 - A^T D \rangle = 0$$

- (k) Montrer que les pseudo-solutions de Σ sont les solutions de Σ' .
- (l) À quelle condition portant sur $\text{rg}(A)$ le système Σ admet-il une unique pseudo-solution ?

922.5

Centrale II

On s'intéresse au lancer d'une pièce, pour laquelle on a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'obtenir pile. On note $q = 1 - p$. On effectue une succession de lancers indépendants et on définit l'événement :

$E_n =$ « Deux piles successifs n'ont pas été obtenus lors des n premiers lancers »

On note $P(E_n) = p_n$.

- (a) Définir une fonction $\text{En}(n, p)$ qui simule l'expérience et renvoie **True** si E_n est réalisé, **False** sinon.
- (b) b1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$:

$$p_{n+2} = qp_{n+1} + pqp_n$$

- b2. Montrer que :

$B =$ « Deux piles successifs ont été obtenus »

est un événement presque sûr.

- b3. On note T la v.a. qui vaut n lorsque deux piles successifs apparaissent pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ lancer. Modifier la première fonction pour simuler T .

- (c) c1. Calculer la fonction génératrice de T en fonction de p .
- c2. Montrer que T admet une espérance et calculer $E(T)$.
- c3. Proposer une méthode pour obtenir numériquement $E(T)$, et vérifier pour quelques valeurs de p l'espérance calculée à la question précédente.

Examinateur presque inaudible, mais bienveillant et poli. Il a écouté toutes mes propositions et me guidait vers la plus adéquate. Il semblait apprécier l'emploi de termes rigoureux de proba. Il a gentiment essayé de me piéger sur le rayon de convergence de G_X , dommage pour lui.

922.6

Centrale II

On note $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$.

- (a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .
- (b) Tracer son graphe sur $[-10, 10]$. Que peut-on conjecturer ?
- (c) c1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- c2. En effectuant le changement de variable $u = xt$, montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .
- (d) On considère $(E) : y'' - y = 0, y(0) = \frac{\pi}{2}, y'(0) = -\frac{\pi}{2}$.
- d1. Montrer que (E) admet une unique solution.

d2. Tracer les solutions sur $[0, 10[$, avec `scipy.integrate.odeint`. Qu'en déduire par rapport à f ?

(e) e1. Montrer que $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{x}{u^2 + x^2} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{u^2 + x^2} \right)$.

e2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' = y$.

Et d'autres questions.

922.7

© ⓘ ⓘ ⓘ ⓘ Concours Centrale Supélec - Math II

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice carrée $M(n)$ formée « en serpent » par les nombres $1, 2, 3, 4, \dots, n^2$. Par exemple :

$$M(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad M(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad M(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

- Donner en Python une fonction f telle que $f(n, i, j) = (M(n))_{i,j}$.
- Créer une fonction M d'argument $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoyant $M(n)$. Tester pour $1 \leq n \leq 5$.
- Calculer le rang de $M(n)$ pour $1 \leq n \leq 10$.
- Conjecturer la valeur de $\text{rg}(M(n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et démontrer cette conjecture.
- Définir une fonction permettant d'afficher la ligne brisée formée par les points de coordonnées $(k, \text{tr}(M(k)))$, pour $1 \leq k \leq n$.
Tester pour $n = 100$. Essayer aussi pour $n = 1000$.
- Afficher les 100 premières valeurs de $\frac{\text{tr}(M(n))}{n^3}$. Commenter.
- Trouver un équivalent de $\text{tr}(M(n))$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- Trouver une expression pour $\text{tr}(M(n))$ (on pourra commencer par traiter le cas où n est pair).