

923.1

Centrale II

On considère la fonction S définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-|x-n|}}{2^n}$$

- (a) Montrer que S est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .
- (b) Représenter le graphe de S sur $[0, 6]$.
- (c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.
- (d) d1. Montrer que S est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer la valeur exacte de $\int_0^{+\infty} S(x) dx$.
d2. Comparer cette valeur à une valeur approchée obtenue en Python.
- (e) On pose, pour $x \geq 0$, $F(x) = 2^x S(x)$.
 - e1. Tracer le graphe de F sur $[0, 20]$.
 - e2. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $F(k)$ puis la limite de $F(k)$ pour $k \rightarrow +\infty$. Vérifier numériquement la valeur obtenue.
 - e3. Montrer que F n'admet pas de limite en $+\infty$.

923.2

Centrale II

On s'intéresse à :

$$F(x) = x \int_0^x \frac{P(t)}{t^2 + x^2} dt$$

où $P \in \mathbb{R}[X]$.

- (a) Définir une fonction prenant en argument P et x et renvoyant $F(x)$.
- (b) Représenter la courbe de F lorsque $P = X^2 + 1$ et $P = X^4 + X^3 + 2$.
- (c) Tracer la courbe paramétrée par $(F(t), P(t))$ pour $P = X^2$, $P = X^3$ et $P = X^4$.
Que conjecturer ?
- (d) Montrer que $\varphi : P \mapsto F$ est un endomorphisme.
- (e) Montrer que la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme et déterminer les matrices de φ_4 et φ_6 .
Que conjecturer quant aux valeurs propres de φ_n ?
- (f) Démontrer cette conjecture.
- (g) Calculer les 10 premières valeurs propres.
- (h) *Encore deux questions que je n'ai pas eu le temps de noter.*

Examinateur discret mais donne des indications si besoin. On utilise Pyzo. Penser aux bouchons d'oreilles!!!

923.3

(a) On considère l'équation différentielle :

$$y''(t) + e^t y(t) = 0 \quad (E)$$

Tracer les solutions de (E) pour des conditions arbitraires. Que remarque-t-on ?

(b) Pour $a \in \mathbb{R}$, on note :

$$y''(t) + e^a y(t) = 0 \quad (E_a)$$

Tracer la solution de (E_a) vérifiant $y(a) = 0$ et $y'(a) = 2$ pour $a \in \{10^{-2}, 1, 2\}$ et $t \in [a, 15]$. Que remarque-t-on ?

(c) On considère une solution y non nulle de (E_a) . Montrer que, pour tout t_0 zéro de y , il existe $\varepsilon > 0$ tel que y ne s'annule pas sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\setminus \{t_0\}$.

(d) Montrer que les solutions de (E_a) sont de la forme :

$$g_{A,B}(t) = A \sin\left(e^{\frac{a}{2}} t + B\right)$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

(e) On pose $y_a = g_{1,1-a}$ et $W(t) = y(t)y'_a(t) - y'_a(t)y_a(t)$. Montrer que W est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer $W'(t)$.

923.4

⊗ ⊕ ⊗ ⊗ Concours Centrale Supélec - Math II

(a) Avec Python, créer un tableau b tel que, pour tout (i, j) de $\llbracket 0, 12 \rrbracket^2$, on ait :

$$\begin{cases} b_{i,j} = \binom{i}{j} & \text{si } j \leq i \\ b_{i,j} = 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

(b) On note $e = \exp(1)$ et pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_{n,k} = \frac{k^n}{k!}$.

b1. Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , la série de terme général $u_{n,k}$, pour k de \mathbb{N} , est convergente.

On note $A_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$ sa somme.

b2. Donner la valeur exacte de A_0 et A_1 .

b3. Exprimer, pour tout $n \geq 1$, A_{n+1} en fonction de $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$.

b4. En déduire les valeurs exactes de A_n pour n dans $\llbracket 0, 12 \rrbracket$.

(c) On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$.

c1. Montrer que cette série entière est de rayon de convergence R non nul, au moins égal à 1.

Pour tout x de $I =]-R, R[$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$.

c2. Donner une représentation à l'écran de f sur un intervalle convenable.

c3. Montrer que f est solution sur I d'une équation différentielle linéaire homogène que l'on précisera.

c4. En déduire une expression de $f(x)$ sans le signe de sommation et une nouvelle représentation à l'écran de f sur un intervalle convenable.

c5. Avec cette expression, donner une nouvelle méthode pour calculer les A_n et vérifier pour n dans $\llbracket 0, 12 \rrbracket$.

c6. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$.

923.5

© ⓘ ⓘ ⓘ ⓘ Concours Centrale Supélec - Math II

Soit n un entier naturel. On dispose de $(n + 1)$ urnes U_0, \dots, U_n . Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'urne U_j contient $j + 1$ boules numérotées de 0 à j . On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise selon le protocole suivant :

- au premier tirage, on tire une boule avec remise dans l'urne U_n ;
- à l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule numéro j ($j \in \llbracket 0, n \rrbracket$), le second tirage s'effectue dans l'urne U_j ;
- on continue alors les tirages selon la même règle : pour tout k dans \mathbb{N}^* , on tire une boule avec remise au k -ième tirage et on note le numéro j de la boule tirée. Le $(k + 1)$ -ième tirage s'effectue alors avec remise dans l'urne U_j .

Pour tout k dans \mathbb{N}^* , on note X_k la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du k -ième tirage. Le premier tirage ayant lieu dans l'urne U_n , on pose $X_0 = n$.

Pour tout entier naturel k , on considère la matrice W_k dans $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ \vdots \\ P(X_k = n) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel k , on note $E(X_k)$ l'espérance de X_k .

- (a) a1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- a2. Dédurre du résultat précédent que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite P dont on précisera brièvement la nature géométrique.
- a3. Écrire une fonction `matriceA(n)` qui prend en paramètre un entier n et renvoie la matrice A correspondante.
- a4. En utilisant la fonction `linalg.eig` de `numpy` déterminer le vecteur propre associé à la valeur propre 1 de A .
- (b) Écrire une fonction qui prend en paramètres deux entiers k et n et renvoie une liste contenant le résultat de k tirages (on pourra utiliser la fonction `random.randint` du module `random` de Python).
Tester plusieurs fois avec $n = 10$ (puis $n = 100$) et $k = 50$.
- (c) c1. Pour tout j dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, écrire $P(X_{k+1} = j)$ en fonction de certains des nombres $P(X_k = i)$ pour i dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.
- c2. En déduire la relation : $W_{k+1} = AW_k$ puis une expression de W_k en fonction de A et de W_0 .
- c3. Écrire une fonction en Python qui prend en paramètres deux entiers k et n qui engendre le vecteur W_0 , calcule A^k (en utilisant `matriceA(n)`) et renvoie le vecteur W_k correspondant.
Tester le programme avec $n = 10$ (puis $n = 100$) et $k = 20$.
- (d) d1. Déterminer la matrice B dans $\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $BW_k = E(X_k)$.
- d2. Calculer le produit BA en fonction de B .
- d3. Pour tout entier naturel k , exprimer $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$.
- d4. En déduire l'expression de $E(X_k)$ en fonction de k et n .
Ce résultat est-il en accord avec les résultats théoriques et empiriques précédents ?

923.6

Centrale II

On s'intéresse à une fonction G de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* telle que :

$$\begin{cases} G(1) = 0 \\ G(t+1) - G(t) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} G'(t) = 0 \end{cases}$$

- (a) a1. Montrer que $G'(t)$ s'écrit comme somme d'une série de fonctions à déterminer.
 a2. Déterminer G en tant que somme d'une série de fonctions.
- (b) On définit une suite complexe par :

$$z_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = z_n + i \frac{z_n}{|z_n|}$$

- b1. Montrer que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie.
 b2. En calculer les 10 premiers termes.
- (c) On note A_n le point d'affixe z_n .
- c1. Représenter A_1, A_2, \dots, A_5 .
 c2. Tracer, pour $t \in [1, 5]$, l'arc paramétré par :

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \cos(G(t)) \\ y(t) = \sqrt{t} \sin(G(t)) \end{cases}$$

- c3. Émettre une conjecture sur l'arc, et la démontrer.

923.7

Centrale II

Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes qui suivent la loi :

$$P(X = 1) = p, P(X = 2) = 1 - p$$

On note $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$ et $Y_k = \text{Inf}\{n, S_n \geq k\}$.

- (a) Montrer l'existence de Y_k .
 Écrire un programme qui dépend de p et k et qui représente cette expérience.
- (b) Écrire un programme permettant de calculer une valeur approchée de l'espérance de Y_k notée $m(k)$.
 Tracer, pour $k \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$, les $(k, m(k))$ pour $p \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$.
- (c) Montrer que :

$$P(Y_k = n) = pP(Y_{k-1} = n-1) + (1-p)P(Y_{k-2} = n-1)$$

- (d) Montrer que :

$$E(Y_k) = pE(Y_{k-1}) + (1-p)E(Y_{k-2}) + 1$$

- (e) Montrer qu'il existe une constante C_p dépendant de p et que l'on précisera telle que :

$$E(Y_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} C_p k$$