923.1

Centrale II

On considère la fonction S définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-|x-n|}}{2^n}$$

(a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Représenter le graphe de S sur $[0, 6]$.

(c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.

(d) d1. Montrer que S est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$.

d2. Comparer cette valeur à une valeur approchée obtenue en Python.

(e) On pose, pour $x \geqslant 0$, $F(x) = 2^x S(x)$.

e1. Tracer le graphe de F sur $[0, 20]$.

e2. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $F(k)$ puis la limite de $F(k)$ pour $k \to +\infty$. Vérifier numériquement la valeur obtenue.

e3. Montrer que F n'admet pas de limite en $+\infty$.

923.2

Centrale II

On s'intéresse à :

$$F(x) = x \int_0^x \frac{P(t)}{t^2 + x^2}\,\mathrm{d}t$$

où $P \in \mathbb{R}[X]$.

(a) Définir une fonction prenant en argument P et x et renvoyant $F(x)$.

(b) Représenter la courbe de F lorsque $P = X^2 + 1$ et $P = X^4 + X^3 + 2$.

(c) Tracer la courbe paramétrée par $(F(t), P(t))$ pour $P = X^2$, $P = X^3$ et $P = X^4$.
Que conjecturer ?

(d) Montrer que $\varphi : P \mapsto F$ est un endomorphisme.

(e) Montrer que la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme et déterminer les matrices de φ_4 et φ_6.
Que conjecturer quant aux valeurs propres de φ_n ?

(f) Démontrer cette conjecture.

(g) Calculer les 10 premières valeurs propres.

(h) *Encore deux questions que je n'ai pas eu le temps de noter.*

Examinateur discret mais donne des indications si besoin. On utilise `Pyzo`. *Penser aux bouchons d'oreilles !!!*

923.3

(a) On considère l'équation différentielle :

$$y''(t) + \mathrm{e}^t y(t) = 0 \qquad (E)$$

Tracer les solutions de (E) pour des conditions arbitraires. Que remarque-t-on ?

(b) Pour $a \in \mathbb{R}$, on note :

$$y''(t) + \mathrm{e}^a y(t) = 0 \qquad (E_a)$$

Tracer la solution de (E_a) vérifiant $y(a) = 0$ et $y'(a) = 2$ pour $a \in \{10^{-2}, 1, 2\}$ et $t \in [a, 15]$. Que remarque-t-on ?

(c) On considère une solution y non nulle de (E_a). Montrer que, pour tout t_0 zéro de y, il existe $\varepsilon > 0$ tel que y ne s'annule pas sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\setminus \{t_0\}$.

(d) Montrer que les solutions de (E_a) sont de la forme :

$$g_{A,B}(t) = A \sin\left(\mathrm{e}^{\frac{a}{2}} t + B\right)$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

(e) On pose $y_a = g_{1,1-a}$ et $W(t) = y(t)y_a'(t) - y'(t)y_a(t)$. Montrer que W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $W'(t)$.

923.4

 Concours Centrale Supélec - Math II

(a) Avec Python, créer un tableau b tel que, pour tout (i, j) de $[\![0, 12]\!]^2$, on ait :

$$\begin{cases} b_{i,j} = \binom{i}{j} & \text{si } j \leqslant i \\ b_{i,j} = 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

(b) On note $\mathrm{e} = \exp(1)$ et pout tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_{n,k} = \dfrac{k^n}{k!}$.

b1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, la série de terme général $u_{n,k}$, pour k de $\mathbb{N}$, est convergente. On note $A_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$ sa somme.

b2. Donner la valeur exacte de A_0 et A_1.

b3. Exprimer, pour tout $n \geqslant 1$, A_{n+1} en fonction de $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.

b4. En déduire les valeurs exactes de A_n pour n dans $[\![0, 12]\!]$.

(c) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$.

c1. Montrer que cette série entière est de rayon de convergence R non nul, au moins égal à 1. Pour tout x de $I =]-R, R[$, on note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$.

c2. Donner une représentation à l'écran de f sur un intervalle convenable.

c3. Montrer que f est solution sur I d'une équation différentielle linéaire homogène que l'on précisera.

c4. En déduire une expression de $f(x)$ sans le signe de sommation et une nouvelle représentation à l'écran de f sur un intervalle convenable.

c5. Avec cette expression, donner une nouvelle méthode pour calculer les A_n et vérifier pour n dans $[\![0, 12]\!]$.

c6. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$.

923.5

 Concours Centrale Supélec - Math II

Soit n un entier naturel. On dispose de $(n+1)$ urnes $U_0, \ldots, U_n$. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, l'urne U_j contient $j+1$ boules numérotées de 0 à j. On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise selon le protocole suivant :

- au premier tirage, on tire une boule avec remise dans l'urne U_n ;
- à l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule numéro j ($j \in [\![0,n]\!]$), le second tirage s'effectue dans l'urne U_j ;
- on continue alors les tirages selon la même règle : pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on tire une boule avec remise au k-ième tirage et on note le numéro j de la boule tirée. Le $(k+1)$-ième tirage s'effectue alors avec remise dans l'urne U_j.

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du k-ième tirage. Le premier tirage ayant lieu dans l'urne U_n, on pose $X_0 = n$.
Pour tout entier naturel k, on considère la matrice W_k dans $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ \vdots \\ P(X_k = n) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel k, on note $E(X_k)$ l'espérance de X_k.

(a) a1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

a2. Déduire du résultat précédent que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite P dont on précisera brièvement la nature géométrique.

a3. Écrire une fonction `matriceA(n)` qui prend en paramètre un entier n et renvoie la matrice A correspondante.

a4. En utilisant la fonction `linalg.eig` de `numpy` déterminer le vecteur propre associé à la valeur propre 1 de A.

(b) Écrire une fonction qui prend en paramètres deux entiers k et n et renvoie une liste contenant le résultat de k tirages (on pourra utiliser la fonction `random.randint` du module `random` de Python).
Tester plusieurs fois avec $n = 10$ (puis $n = 100$) et $k = 50$.

(c) c1. Pour tout j dans $[\![0,n]\!]$, écrire $P(X_{k+1} = j)$ en fonction de certains des nombres $P(X_k = i)$ pour i dans $[\![0,n]\!]$.

c2. En déduire la relation : $W_{k+1} = AW_k$ puis une expression de W_k en fonciton de A et de W_0.

c3. Écrire une fonction en Python qui prend en paramètres deux entiers k et n qui engendre le vecteur W_0, calcule A^k (en utilisant `matriceA(n)`) et renvoie le vecteur W_k correspondant.
Tester le programme avec $n = 10$ (puis $n = 100$) et $k = 20$.

(d) d1. Déterminer la matrice B dans $\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $BW_k = E(X_k)$.

d2. Calculer le produit BA en fonction de B.

d3. Pour tout entier naturel k, exprimer $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$.

d4. En déduire l'expression de $E(X_k)$ en fonction de k et n.
Ce résultat est-il en accord avec les résultats théoriques et empiriques précédents ?

923.6

Centrale II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules blanches et $n+2$ boules noires. On dit qu'elle est à « l'état n ».
On tire au hasard une boule. Si elle est blanche, on l'enlève et on enlève une boule noire. Si elle est noire, on la remet et on met une noire et une blanche supplémentaires.

(a) Justifier que l'on passe de « l'état n » à « l'état $n+1$ » ou « l'état $n-1$ ».

(b) b1. Écrire en Python une fonction qui modélise une expérience en partant de l'état `n`.

b2. Simuler 1000 tirages pour $n = 5$, $n = 10$, $n = 20$, $n = 100$. Formuler une conjecture sur l'état de l'urne.

(c) On convient que le jeu se termine lorsqu'il n'y a plus aucune boule blanche dans l'urne. On note l'événement E_j « en partant de "l'état j", le jeu a une durée finie ». On note $e_j = P(E_j)$, $e_0 = 1$ et $e_1 = \frac{1}{2}$.

c1. Montrer que :

$$e_j = \frac{j}{2j+2}e_{j-1} + \frac{j+2}{2j+2}e_{j+1}$$

c2. Justifier la convergence de $(e_j)_j$. Interpréter avec la conjecture formulée précédemment.

(d) On définit la suite de vecteurs $U_j = \begin{pmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{pmatrix}$ avec $u_j = (j+1)e_j$. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $U_{j+1} = AU_j$. En déduire U_j en fonction de U_0.

(e) La matrice A est-elle diagonalisable ? Montrer qu'elle est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donner U_j et conclure.

Examinateur en retard qui a raccourci un peut l'oral pour rattraper son retard... Assez froid et blasé, mais il m'a quand même aidé poru développer mon raisonnement. Je pense qu'il ne m'aurait pas aidé si je ne lui avais pas proposé de pistes. Pas sympa avec la fille avant moi. J'étais en préparation dans la salle où elle passait, donc bien de prendre des boules Quiès ! J'ai d'abord présenté le problème, ce que j'avais fait en Pyzo, et ensuite il m'a envoyé au tableau.

923.7

Centrale II

On définit la suite de fonctions $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$:

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2x}{x^2-n^2}$$

(a) Écrire avec Python une fonction `S(N,x)` renvoyant $S_N(x)$.

(b) Écrire une fonction prenant trois paramètres `N`, `a` et `b` et traçant le graphe de S_N sur le segment $[a, b]$.

(c) Montrer que la suite $(S_N)_N$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ vers une fonction que l'on notera S.

(d) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(e) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, impaire et 1-périodique.

(f) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ S\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S(x)$$

(g) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \pi \operatorname{cotan}(\pi x) - S(x)$ vérifie la même relation.

(h) Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. En déduire S.

923.8

Centrale II

On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

(a) a1. Montrer que $\sum u_n$ converge et déterminer une valeur approchée de sa somme à 10^{-6} près.

a2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ln 2$.

$(u_n)_n$ est de la forme $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots)$.

On définit $(v_n)_n$ par $(1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{6}, \dots)$, c'est-à-dire en réordonnant les termes de $(u_n)_n$ en prenant successivement deux positifs, un négatif. On note $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $t_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

(b) b1. Écrire une fonction qui renvoie v_n.
On différenciera les cas $n = 3k$, $n = 3k + 1$ et $n = 3k + 2$.

b2. Représenter sur un même graphe les 200 premières valeurs de $(s_n)_n$ et $(t_n)_n$. Quelle conjecture formuler ?

b3. Démontrer la convergence de la suite $(t_n)_n$.

Examinateur bienveillant, ne met pas la pression mais ne nous confirme pas que l'on a juste : il intervient seulement pour une indication ou pour indiquer une erreur.

923.9

Centrale II

On considère la fonction S définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-|x-n|}}{2^n}$$

(a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Représenter le graphe de S sur $[0, 6]$.

(c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$.

(d) d1. Montrer que S est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$.

d2. Comparer cette valeur à une valeur approchée obtenue en Python.

(e) On pose, pour $x \geqslant 0$, $F(x) = 2^x S(x)$.

e1. Tracer le graphe de F sur $[0, 20]$.

e2. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $F(k)$ puis la limite de $F(k)$ pour $k \to +\infty$. Vérifier numériquement la valeur obtenue.

e3. Montrer que F n'admet pas de limite en $+\infty$.

923.10

Centrale II

On s'intéresse à une fonction G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\begin{cases} G(1) = 0 \\ G(t+1) - G(t) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \\ \lim\limits_{t \to +\infty} G'(t) = 0 \end{cases}$$

(a) a1. Montrer que $G'(t)$ s'écrit comme somme d'une série de fonctions à déterminer.

a2. Déterminer G en tant que somme d'une série de fonctions.

(b) On définit une suite complexe par :

$$z_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = z_n + \mathrm{i}\frac{z_n}{|z_n|}$$

b1. Montrer que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie.

b2. En calculer les 10 premiers termes.

(c) On note A_n le point d'affixe z_n.

c1. Représenter $A_1, A_2, \ldots, A_5$.

c2. Tracer, pour $t \in [1, 5]$, l'arc paramétré par :

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{t}\cos(G(t)) \\ y(t) = \sqrt{t}\sin(G(t)) \end{cases}$$

c3. Émettre une conjecture sur l'arc, et la démontrer.

923.11

Centrale II

On pose $u_n(k) = \dfrac{k^n}{k!}$, ainsi que :

$$U_0 = 1 \text{ et, pour } n \geqslant 1,\ U_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} U_j$$

(a) Écrire une fonction `factorielle(n)` et une fonction `U(n)` calculant respectivement $n!$ et U_n.

(b) Comparer $n!$ et U_n, faire une conjecture et la démontrer.

(c) Montrer que $\sum_{k\geqslant 0} u_n(k)$ converge. On note S_n sa somme. Calculer S_0.

(d) Écrire une fonction pour calculer $S_n(p) = \sum_{k=0}^{p} u_n(k)$. Comparer U_n et S_n, faire une conjecture.

(e) Montrer que $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} S_j$. Démontrer la conjecture précédente.

(f) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{U_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. On note $f(x)$ sa somme.

(g) Déterminer une équation différentielle satisfaite par f.

(h) En déduire une expression de $f(x)$.

923.12

Centrale II

Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes qui suivent la loi :

$$P(X = 1) = p,\ P(X = 2) = 1 - p$$

On note $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$ et $Y_k = \mathrm{Inf}\{n,\ S_n \geqslant k\}$.

(a) Montrer l'existence de Y_k.
Écrire un programme qui dépend de p et k et qui représente cette expérience.

(b) Écrire un programme permettant de calculer une valeur approchée de l'espérance de Y_k notée $m(k)$.
Tracer, pour $k \in [\![1, 100]\!]$, les $(k, m(k))$ pour $p \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$.

(c) Montrer que :
$$P(Y_k = n) = pP(Y_{k-1} = n - 1) + (1 - p)P(Y_{k-2} = n - 1)$$

(d) Montrer que :
$$E(Y_k) = pE(Y_{k-1}) + (1 - p)E(Y_{k-2}) + 1$$

(e) Montrer qu'il existe une constante C_p dépendant de p et que l'on précisera telle que :

$$E(Y_k) \underset{t\to+\infty}{\sim} C_p k$$