550. Séries entières

On se concentre pour l'instant sur les séries entières de la variable réelle.

Rayon de convergence Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence. Propriétés. Intervalle ouvert de convergence.
Détermination pratique du rayon de convergence. $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$. Comparaison des rayons de convergence par comparaison asymptotique des coefficients. $R(\sum n a_n x^n) = R(\sum a_n x^n)$.
Règle de d'Alembert pour les séries entières. Utilisation de la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

Opérations sur les séries entières Somme, multiplication par un scalaire, produit de Cauchy. Rayons de convergence.

Régularité de la somme Convergence normale sur tout $[-a, a] \subset]-R, R[$.
Continuité de la somme d'une série entière sur $]-R, R[$.
Théorème radial d'Abel : si $\sum a_n R^n$ converge, S est continue (à gauche) en R.
Primitives, intégrale sur $[a, b] \subset]-R, R[$.
Dérivation, unicité des coefficients d'une série entière.

Développement en série entière d'une fonction d'une variable réelle Fonction développable en série entière. Unicité, cas des fonctions paires ou impaires.
Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$.
Opérations sur les fonctions développables en série entière. Utilisation de la formule de Taylor avec reste-intégral. Utilisation d'une équation différentielle. Formulaire ($\exp(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\mathrm{Arctan}(x)$).
Pistes pour exprimer la somme d'une série entière avec des fonctions usuelles.

Exercices et résultats classiques à connaître

550.1

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n}$.

550.2

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

550.3

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ en prolongeant par continuité l'égalité valable sur $]-1, 1[$:

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$$

550.4

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ en utilisant la formule :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n \mathrm{d}t$$

550.5

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

(b) Rappeler sans démonstration le DSE de $x \mapsto \operatorname{ch} x$.

(c) c1. Déterminer $S(x)$.

c2. On considère la fonction : $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$

Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

550.6

Développer $\operatorname{Arccos} x$ en série entière.

550.7

[*]

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.

(c) Montrer que la série de Taylor de la fonction tangente converge sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(d) En désignant par S la somme de la série de Taylor, montrer que $S' = 1 + S^2$.
Montrer ensuite que $S = \tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercices du CCINP à travailler

0.8 CCINP **2**

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.

3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.
   On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

0.9 CCINP **15.3**

3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

0.10 CCINP **19**

1. (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.
   Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_n x^n$ et la série $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.

   (b) En déduire le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable réelle : $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.

   (b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.

   (c) En déduire le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z \mapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

0.11 CCINP **20**

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

(a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

(b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$.

(c) $\sum \cos n z^n$.

0.12 INP 21

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

0.13 INP 22

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f\ :\ x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?
   En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

0.14 INP 23

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ ont le même rayon de convergence.
   On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

0.15 INP 24

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

3. (a) Déterminer $S(x)$.
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \text{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 \ .$$

   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

0.16 INP 32.1

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.

0.17 INP 47

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.
2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

0.18 INP 51

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \text{Arcsin}\, x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.