66 Intégration sur un intervalle quelconque

Révision

67 Intégrales à paramètre

Continuité des intégrales à paramètre. Pour les applications pratiques, on ne vérifie pas la continuité par morceaux en la variable d'intégration. Domination locale.
Limite des intégrales à paramètre : convergence dominée à paramètre continu.
Classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre. Domination locale.
Classe $\mathcal{C}^k$ des intégrales à paramètre. Domination locale.

55 Séries entières

On se concentre pour l'instant sur les séries entières de la variable réelle.

Rayon de convergence Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence. Propriétés. Intervalle ouvert de convergence.
Détermination pratique du rayon de convergence. $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$. Comparaison des rayons de convergence par comparaison asymptotique des coefficients. $R(\sum na_n x^n) = R(\sum a_n x^n)$.
Règle de d'Alembert pour les séries entières. Utilisation de la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

Opérations sur les séries entières Somme, multiplication par un scalaire, produit de Cauchy. Rayons de convergence.

Régularité de la somme Convergence normale sur tout $[-a, a] \subset]-R, R[$.
Continuité de la somme d'une série entière sur $]-R, R[$.
Théorème radial d'Abel : si $\sum a_n R^n$ converge, S est continue (à gauche) en R.
Primitives, intégrale sur $[a, b] \subset]-R, R[$.
Dérivation, unicité des coefficients d'une série entière.

Développement en série entière d'une fonction d'une variable réelle Fonction développable en série entière. Unicité, cas des fonctions paires ou impaires.
Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$.
Opérations sur les fonctions développables en série entière. Utilisation de la formule de Taylor avec reste-intégral. Utilisation d'une équation différentielle. Formulaire ($\exp(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\mathrm{Arctan}(x)$).
Pistes pour exprimer la somme d'une série entière avec des fonctions usuelles.

Exercices et résultats classiques à connaître

67.1

Montrer que $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t^2}\mathrm{d}t \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et déterminer sa limite en $+\infty$.

67.2

On pose, pour tout x de $]0,+\infty[$ et pour tout t de $]0,+\infty[$:

$$f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$$

(a) Démontrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose, pour $x \in]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$$

(b) Démontrer que, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(c) Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

67.3

Uniquement MPI* On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie sur $[0,+\infty[$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Expliciter $f'(x)$ et en déduire une expression simple de $f(x)$ sur $]0,+\infty[$.

(c) On admet pour l'instant que f est continue en 0. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

(d) Démontrer que f est continue en 0.

67.3

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie sur $[0,+\infty[$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Expliciter $f'(x)$ et en déduire une expression simple de $f(x)$ sur $]0,+\infty[$.

(c) On admet que f est continue en 0. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

67.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $t \mapsto tf(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}f(t)\mathrm{d}t$$

La fonction g est appelée la **transformée de Fourier de** f.
Montrer que g est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

67.5

Pour f continue sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles, on définit sous réserve d'existence :

$$\mathcal{L}\{f\} \ : \ s \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

appelée **transformée de Laplace** de f.
On suppose dorénavant que :

$$\exists k \in \mathbb{N}^*,\ f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(t^k) \tag{H}$$

et on note $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$.

(a) Montrer que F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

(b) Montrer que $F(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$.

(c) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall s > 0,\ F'(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

55.1

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n}$.

55.2

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

55.3

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ en prolongeant par continuité l'égalité valable sur $]-1,1[$:

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$$

55.4

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ en utilisant la formule :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n \mathrm{d}t$$

Exercices du CCINP à travailler

0.5 CCINP **29.3**

On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, t \in]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

0.6 CCINP **30**

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E) .

0.7 CCINP **50**

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\,t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

0.8 CCINP **2**

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r,r[$ (où $r>0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R>0$.
   On pose, pour tout $x \in]-R,R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

0.9 CCINP **15.3**

3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!}z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

0.10 — INP 19

1. (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.
   Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_n x^n$ et la série $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.
   (b) En déduire le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable réelle : $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.
   (b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.
   (c) En déduire le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z \mapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

0.11 — INP 20

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

   (a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.
   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$.
   (c) $\sum \cos n z^n$.

0.12 — INP 21

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

0.13 — INP 22

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f \; : \; x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?
   En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?