Aux colleurs

L'objectif cette année, c'est de vérifier la bonne utilisation de la formule des probabilités totales et des probabilités composées, sans variable aléatoire.
Après cette semaine de colle, il y aura une longue pause : reprise des colles la semaine du 12 janvier.
Bonnes fêtes de fin d'année.

560. Sommabilité, sommes

Sommes finies $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$, $\sum_{k=1}^{n} x^k$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$.
Manipulation des sommes finies doublement indexées.

Ensembles dénombrables Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou en bijection avec $\mathbb{N}$. Ensemble dénombrable, au plus dénombrable. Exemples et contre-exemple. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Opérations sur les ensembles au plus dénombrables : produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables, union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables. Énumération des éléments d'un ensemble au plus dénombrable.

Somme d'une famille de réels positifs Somme dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ de $(u_i)_{i\in I} \in [0, +\infty]^I$. Cas où I est fini, cas où $I = \mathbb{N}$. Invariance par permutation. Sommation par paquets. Théorème de Fubini positif pour les familles doublement indexées. Combinaison linéaires à coefficients positifs, croissance de la somme, somme d'une sous-famille.
Sommabilité. Une famille sommable au un nombre d'éléments non nuls au plus dénombrables.

Familles sommables de réels quelconques, de complexes $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$. Somme d'une famille sommable de réels, d'une famille sommable de complexes. Sommabilité par majoration de $|u_i| \leqslant v_i$ où $(v_i)_i$ est sommable.
Invariance par permutation. Sommation par paquets. Théorème de Fubini pour les familles sommables doublement indexées, produit de Cauchy.
Espace $\ell^1(I)$.

820. Espaces probabilisés

Espace probabilisable, espace probabilisé Tribu, propriété, exemples, vocabulaire, système complet d'événements. Probabilité, propriétés. Exemple du pile-face infini.

Propriétés des probabilités Croissance, union disjointe, union, continuité croissante, adaptation avec les unions partielles, sous additivité, continuité décroissante, adaptation avec les intersections partielles.

Négligeabilité Événement négligeable, événement presque sûr, système quasi-complet d'événements.

Conditionnement, indépendance Probabilité conditionnelle, probabilités composées, probabilités totales, formule de Bayes.

Indépendance Indépendance de deux événements, propriétés. Famille d'événements indépendants, deux à deux indépendants. Propriétés.

Exercices et résultats classiques à connaître

820.1

On lance une pièce avec la probabilité p de faire « Pile ». On note A_n l'événement « on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du $n^{\text{ème}}$ lancer » et l'on désire calculer sa probabilité a_n.

(a) Déterminer a_1, a_2 et a_3.

(b) Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n \geqslant 1$.

(c) Justifier qu'il est presque sûr d'obtenir deux piles consécutifs.

(d) ~~Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.~~

820.2

On considère en première approximation que la météo à Lyon n'a que deux états : beau et gris/pluvieux. On suppose de plus que :

- s'il fait beau, il y a 80 % de chance qu'il fasse encore beau le lendemain ;
- s'il ne fait pas beau, il y a 30 % de chance que ça continue le lendemain.

On note p_n la probabilité qu'il fasse beau au n-ième jour, en supposant que l'on commence l'observation un jour de beau temps.

(a) Schématiser la situation à l'aide d'un graphe pondéré.

(b) Montrer que la suite $(p_n)_n$ est arithmético-géométrique.

(c) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau dans très longtemps ?

820.3

On étudie une population, et on admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'une famille ait n enfants est donnée par :

$$p_n = k\frac{(2.1)^n}{n!}$$

(a) Déterminer la constante k.

(b) On suppose qu'un enfant naît avec une probabilité 0.5 d'être une fille.

b1. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.

b2. On suppose que, parmi les enfants d'une famille, il n'y a qu'une seule fille. Quelle est la probabilité que cette famille ait deux enfants ?

560.1

Soit $s > 1$. On note $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^s}$. Montrer que :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^{s+1}} \right)$$

Exercices du CCINP à travailler

0.2 CCINP 101

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement « l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On note B_n l'événement « l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On note C_n l'événement « l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

0.3 CCINP 105

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

0.4 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.