Aux colleurs

Après cette semaine de colle, il y aura une longue pause : reprise des colles la semaine du 13 janvier avec sans doute toutes les probabilités. Bonnes fêtes de fin d'année.

67 Intégrales à paramètre

Révision

54 Séries de fonctions numériques - interversion $\Sigma/\int$

Révision

55 Séries entières

On se concentre pour l'instant sur les séries entières de la variable réelle.

Rayon de convergence Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence. Propriétés. Intervalle ouvert de convergence.
Détermination pratique du rayon de convergence. $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$. Comparaison des rayons de convergence par comparaison asymptotique des coefficients. $R(\sum na_n x^n) = R(\sum a_n x^n)$.
Règle de d'Alembert pour les séries entières. Utilisation de la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

Opérations sur les séries entières Somme, multiplication par un scalaire, produit de Cauchy. Rayons de convergence.

Régularité de la somme Convergence normale sur tout $[-a, a] \subset]-R, R[$.
Continuité de la somme d'une série entière sur $]-R, R[$.
Théorème radial d'Abel : si $\sum a_n R^n$ converge, S est continue (à gauche) en R.
Primitives, intégrale sur $[a, b] \subset]-R, R[$.
Dérivation, unicité des coefficients d'une série entière.

Développement en série entière d'une fonction d'une variable réelle Fonction développable en série entière. Unicité, cas des fonctions paires ou impaires.
Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$.
Opérations sur les fonctions développables en série entière. Utilisation de la formule de Taylor avec reste-intégral. Utilisation d'une équation différentielle. Formulaire ($\exp(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\mathrm{Arctan}(x)$).
Pistes pour exprimer la somme d'une série entière avec des fonctions usuelles.

56 Sommabilité, sommes

Sommes finies $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$.
Manipulation des sommes finies doublement indexées.

Ensembles dénombrables Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou en bijection avec $\mathbb{N}$. Ensemble dénombrable, au plus dénombrable. Exemples et contre-exemple. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Opérations sur les ensembles au plus dénombrables : produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables, union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables. Énumération des éléments d'un ensemble au plus dénombrable.

Somme d'une famille de réels positifs Somme dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$ de $(u_i)_{i\in I} \in [0,+\infty]^I$. Cas où I est fini, cas où $I = \mathbb{N}$. Invariance par permutation. Sommation par paquets. Théorème de Fubini positif pour les familles doublement indexées. Combinaison linéaires à coefficients positifs, croissance de la somme, somme d'une sous-famille. Sommabilité. Une famille sommable au un nombre d'éléments non nuls au plus dénombrables.

Familles sommables de réels quelconques, de complexes $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$. Somme d'une famille sommable de réels, d'une famille sommable de complexes. Sommabilité par majoration de $|u_i| \leqslant v_i$ où $(v_i)_i$ est sommable.
Invariance par permutation. Sommation par paquets. Théorème de Fubini pour les familles sommables doublement indexées, produit de Cauchy.
Espace $\ell^1(I)$.

Exercices et résultats classiques à connaître

55.5

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

(b) Rappeler sans démonstration le DSE de $x \mapsto \operatorname{ch} x$.

(c) c1. Déterminer $S(x)$.

c2. On considère la fonction :
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

55.6

Uniquement MPI*

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
$$\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.

(c) Montrer que la série de Taylor de la fonction tangente converge sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(d) En désignant par S la somme de la série de Taylor, montrer que $S' = 1 + S^2$.
Montrer ensuite que $S = \tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

55.6

Développer $\operatorname{Arccos} x$ en série entière.

56.1

Soit $s > 1$. On note $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^s}$. Montrer que :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^{s+1}} \right)$$

Exercices du CCINP à travailler

0.2 CCINP 23

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

0.3 CCINP 24

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(0) = 1, \quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 \ .$$

   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

0.4 CCINP 32.1

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.

0.5 CCINP 47

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.
2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

0.6 CCINP 51

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.