Au programme cette semaine :

Toutes les probas

Plus en détail :

82 Espaces probabilisés

Espace probabilisable, espace probabilisé Tribu, propriété, exemples, vocabulaire, système complet d'événements. Probabilité, propriétés. Exemple du pile-face infini. Distribution de probabilités, support.

Propriétés des probabilités Croissance, union disjointe, union, continuité croissante, adaptation avec les unions partielles, sous additivité, continuité décroissante, adaptation avec les intersections partielles.

Négligeabilité Événement négligeable, événement presque sûr, système quasi-complet d'événements.

Conditionnement, indépendance Probabilité conditionnelle, probabilités composées, probabilités totales, formule de Bayes.

Indépendance Indépendance de deux événements, propriétés. Famille d'événements indépendants, deux à deux indépendants. Propriétés.

83 Variables aléatoires discrètes

Qu'importe l'épreuve, pourvu qu'on ait le résultat ! Variable aléatoire discrète, exemples, fonction indicatrice d'un événement. Loi. Fonction d'une variable aléatoire.

Lois usuelles Loi uniforme. Loi de Bernoulli. Loi binomiale, interprétation, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables i.i.d de Bernoulli, alors $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathscr{B}(n, p)$. Loi géométrique, interprétation. Loi de Poisson, interprétation.

Couples de variables aléatoires Loi conjointe, lois marginales. Détermination pratique.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

Indépendance de variables aléatoires Lois conditionnelles. Indépendance de deux variables aléatoires. Indépendance d'une famille fini de variables aléatoires. Indépendance d'une famille quelconque de variables aléatoires. Opérations sur les familles de v.a. indépendantes, fonctions de v.a., lemme des coalitions.

Existence Théorème admis de réalisation, variables i.i.d. et suites i.i.d.

84 Espérance et variance

Espérance Espérance d'un variable aléatoire réelle positive. Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, formule $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$. Variable aléatoire réelle ou complexe d'espérance finie, notation L^1, variable centrée.
Espérance des lois usuelles.
Propriétés : formule de transfert, espérance finie par comparaison, linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.
Si X est positive d'espérance nulle, X est nulle presque sûrement.
Si X et Y sont indépendantes d'espérance finie, XY aussi et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Variance Si X^2 est d'espérance finie, X aussi. Notation L^2. Inégalité de Cauchy-Schwarz $|E(XY)| \leqslant \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$ lorsque $X, Y \in L^2$.
Variance, écart-type, variable réduite.
Dilatation, invariance par translation, somme de v.a. indépendantes.
Variances des lois usuelles.

Covariance Définition. Variables non corrélées.
Règles de calcul.

Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres, utilisation pour estimer numériquement l'espérance.

85 Fonctions génératrices

Définition Rayon de convergence, valeur en 1, $G_X(t) = E(t^X)$. La fonction génératrice caractérise la loi.
Fonctions génératrices des lois usuelles.

Propriétés, régularité
G_X est continue sur $[-1, 1]$.
X est d'espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 (à gauche) et dans ce cas $E(X) = G'_X(1)$.
X admet une variance ssi G_X est dérivable deux fois en 1 (à gauche) et dans ce cas $E(X(X-1)) = G''_X(1)$, ce qui permet de calculer $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2$.

Fonctions génératrices et somme Fonction génératrice d'une somme de v.a. indépendantes.

Exercices et résultats classiques à connaître

82.1

On lance une pièce avec la probabilité p de faire « Pile ». On note A_n l'événement « on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du $n^{\text{ème}}$ lancer » et l'on désire calculer sa probabilité a_n.

(a) Déterminer a_1, a_2 et a_3.

(b) Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n \geqslant 1$.

(c) Justifier qu'il est quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs.

(d) Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.

82.2

On considère en première approximation que la météo à Lyon n'a que deux états : beau et gris/pluvieux. On suppose de plus que :

- s'il fait beau, il y a 80 % de chance qu'il fasse encore beau le lendemain ;
- s'il ne fait pas beau, il y a 30 % de chance que ça continue le lendemain.

On note p_n la probabilité qu'il fasse beau au n-ième jour, en supposant que l'on commence l'observation un jour de beau temps.

(a) Schématiser la situation à l'aide d'un graphe pondéré.

(b) Montrer que la suite $(p_n)_n$ est arithmético-géométrique.

(c) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau dans très longtemps ?

82.3

On étudie une population, et on admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'une famille ait n enfants est donnée par :

$$p_n = k\frac{(2.1)^n}{n!}$$

(a) Déterminer la constante k.

(b) On suppose qu'un enfant naît avec une probabilité 0.5 d'être une fille.

b1. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.

b2. On suppose que, parmi les enfants d'une famille, il n'y a qu'une seule fille. Quelle est la probabilité que cette famille ait deux enfants ?

83.1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépedantes, qui suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ respectivement. Déterminer la loi de $X + Y$.

83.2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépedantes, qui suivent des lois géométriques de paramètres p et q respectivement, avec $p, q \in]0, 1[$.

(a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(X > n)$.

(b) Déterminer la loi de $Z = \text{Min}(X, Y)$.

83.3

Soit X et Y deux v.a. indépendantes géométriques de paramètres p et q respectivement. Calculer la probabilité que la matrice :

$$\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

83.4

On désigne par N le nombre d'électrons émis par un élément chimique pendant une période T. On suppose que $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Chaque électron a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'avoir un effet biologique (on dit dans ce cas qu'il est efficace). On désigne par X le nombre d'électrons efficaces émis pendant une période T.

(a) Donner la loi de X conditionnée par $(N = j)$.

(b) Donner la loi conjointe de (X, N).

(c) Déterminer la loi de X, et la reconnaître.

84.1

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \dfrac{\alpha}{n2^n}$.

(a) Déterminer α pour que la famille $(n, p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X.

(b) X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

(c) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire $Y = (\ln 2)X - 1$?

84.2

Soit $\lambda > 0$ et X un variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{\lambda}{n} P(X = n - 1)$$

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Déterminer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{X + 1}$.

84.3

On lance une pièce amenant pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, jusqu'à l'obtention de deux piles au total. On note X le nombre de faces alors obtenues.
Si $X = n$, on met $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire une boule au hasard. On note Y le numéro de la boule obtenue.

(a) Déterminer la loi de X. Calculer $\mathrm{E}(X)$.

(b) Déterminer la loi du couple (X, Y), et en déduire la loi de Y. Calculer $\mathrm{E}(Y)$.

(c) On définit la variable aléatoire $Z = X - Y$. Montrer que Y et Z sont indépendantes.

84.4

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0, 1\right[$, et modélisant le jeu de Pile ou Face infini, où $\mathsf{P} = 1$ et $\mathsf{F} = 0$. On s'intéresse à la longueur L_1 de la première séquence homogène, et à la longueur L_2 de la deuxième séquence homogène.
Par exemple :

$$(X_n(\omega))_{n\geqslant 1} = \big(\underbrace{\mathsf{P\ P\ P\ P}}_{L_1}\overbrace{\mathsf{F\ F\ F\ F\ F}}^{L_2}\mathsf{P\ P\ F\ F\ F\ P}\,\big)$$

Ici, la première séquence homogène a pour longueur $L_1(\omega) = 4$ et la deuxième $L_2(\omega) = 5$.

(a) Quelle est la loi de L_1 ? son espérance ?

(b) Déterminer la loi du couple (L_1, L_2).

(c) Calculer l'espérance de L_2.

85.1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit N une autre variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des X_i. On s'intéresse à :

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

On note qu'ici le nombre de termes dans la somme est la variable aléatoire N.

(a) Qu'est-il raisonnable de conjecturer quant à la valeur de $E(S)$?

(b) Justifier que S est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(c) Montrer que, pour $t \in [-1, 1]$:

$$G_S(t) = G_N(G_X(t))$$

(d) On suppose que N et X sont d'espérance finie. Établir :

$$E(S) = E(N)E(X)$$

(e) On lance une pièce honnête. Tant que l'on obtient « pile », on lance un dé et on avance son pion du nombre de cases correspondantes. De combien de case avance le pion en moyenne ?

Exercices du CCINP à travailler

0.2 CCINP 101.13

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement « l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On note B_n l'événement « l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On note C_n l'événement « l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. diagonalisation de A
3. Montrer comment les résultats de la question précédente peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

0.3 CCINP 105

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

0.4 CCINP **107**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

0.5 CCINP **109**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

0.6 CCINP **95**

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.
Un joueur tire successivement, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

1. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font avec remise.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que l'on tire simultanément les 5 boules dans l'urne.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

0.7 **97**

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P\left((X,Y) = (j,k)\right) = \frac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

0.8 **98**

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\dbinom{n-i}{k-i}\dbinom{n}{i} = \dbinom{k}{i}\dbinom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

0.9 **99**

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in L^2$.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall\, a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.

3. **Application**
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

0.10 — CCINP **100**

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

0.11 — CCINP **102**

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \underset{1\leqslant i\leqslant N}{\operatorname{Min}}(X_i)$
   c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \operatorname{Min}(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, Min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

0.12 — CCINP **103**

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0,+\infty[)^2$.
   Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2. Soit $p \in]0,1]$. Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
   Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.

0.13 — INP **104**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

0.14 — INP **106**

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \text{Sup}(X, Y)$ et $V = \text{Inf}(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
   En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

0.15 — INP **108**

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall\, (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

0.16 — CCINP 111

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \left]-1, 1\right[$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in \left]0, 1\right[$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall\, (k, n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

0.17 — CCINP 96

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = p_n$.
La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par :

$$G_X(t) = E[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$$

1. Prouver que l'intervalle $\left]-1, 1\right[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $S = X_1 + X_2$.
   Démontrer que $\forall t \in \left]-1, 1\right[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t)$:

   (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières ;
   (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice.

   Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
   On note S_n la somme des numéros tirés.
   Soit $t \in \left]-1, 1\right[$.
   Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

0.18 INP 110

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
   On pose $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé de $[-1, 1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.