Cette semaine, toutes les probas !

810. Dénombrement

Ensembles finis

Dénombrement d'applications, de parties d'un ensemble

Listes, nombre d'injections

Combinaisons

820. Espaces probabilisés

Espace probabilisable, espace probabilisé Tribu, propriété, exemples, vocabulaire, système complet d'événements. Probabilité, propriétés. Exemple du pile-face infini.

Propriétés des probabilités Croissance, union disjointe, union, continuité croissante, adaptation avec les unions partielles, sous additivité, continuité décroissante, adaptation avec les intersections partielles.

Négligeabilité Événement négligeable, événement presque sûr, système quasi-complet d'événements.

Conditionnement, indépendance Probabilité conditionnelle, probabilités composées, probabilités totales, formule de Bayes.

Indépendance Indépendance de deux événements, propriétés. Famille d'événements indépendants, deux à deux indépendants. Propriétés.

830. Variables aléatoires discrètes

Définition, loi Définition, fonction indicatrice d'un événement. La donnée de la loi d'un va est la donnée d'une distribution de probabilités. Fonction d'une va.

Lois usuelles On connaît la loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, géométrique et de Poisson.

Couples de variables aléatoires Loi conjointe, lois marginales. Extension aux n-uplets de va.

Indépendance Lois conditionnelles. Indépendance de deux va. Indépendance d'une famille finie de va. Indépendance d'une famille quelconque de va.
Les fonctions de va indépendantes sont indépendantes.
Lemme des coalitions.

Existence Pour $(\mathscr{L}_i)_i$ suite de loi de probabilités discrètes, on admet l'existence de $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de va indépendantes telle que $X_i \sim \mathscr{L}_i$ pour tout i. Suite i.i.d.

831. Espérance et variance

Espérance Espérance dans $[0, +\infty[\cup\{+\infty\}$ d'une va positive. Formule $E(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$ lorsque X est à valeurs entières. Variable aléatoire d'espérance finie. L'espérance est un indicateur de position.
Variable centrée.
Espérance des lois usuelles.
Propriétés : formule de transfert, espérance finie par comparaison, linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.
Si X est positive d'espérance nulle, elle est presque sûrement nulle.
Si X et Y sont indépendante, $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Variance Définitions. Inégalité de Cauchy-Schwarz : si $X, Y \in L^2$, alors $E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$.
Variance et écart-type. La variance est un indicateur de dispersion. Variable réduite.
Calcul de $V(aX)$, $V(X + b)$, $V(X + Y)$ lorsque X et Y sont indépendantes.
Variance des lois usuelles.

Covariance Définition, règles de calcul.

Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres Inégalité de Markov.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Loi faible des grands nombres.

840. Fonctions génératrices

Définition Minoration du rayon de convergence, la loi d'un va est caractérisée par sa fonction génératrice.
Fonctions génératrices des lois usuelles.

Propriétés, régularité X d'espérance finie ssi G_X dérivable en 1, et $E(X) = G'_X(1)$.
$X \in L^2$ ssi G_X deux fois dérivable en 1, et $E(X(X-1)) = G''_X(1)$.

Fonction génératrice et somme Pour X, Y indépendantes, $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Exercices et résultats classiques à connaître

810.1

(a) Justifier que $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

(b) Justifier que $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}$ en commençant par remarquer que $\binom{n}{p}^2 = \binom{n}{p}\binom{n}{n-p}$.

830.1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépedantes, qui suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ respectivement. Déterminer la loi de $X + Y$.

830.2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépedantes, qui suivent des lois géométriques de paramètres p et q respectivement, avec $p, q \in]0, 1[$.

(a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(X > n)$.

(b) Déterminer la loi de $Z = \text{Min}(X, Y)$.

830.3

Soit X et Y deux v.a. indépendantes géométriques de paramètres p et q respectivement. Calculer la probabilité que la matrice :

$$\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

830.4

On désigne par N le nombre d'électrons émis par un élément chimique pendant une période T. On suppose que $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Chaque électron a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'avoir un effet biologique (on dit dans ce cas qu'il est efficace). On désigne par X le nombre d'électrons efficaces émis pendant une période T.

(a) Donner la loi de X conditionnée par $(N = j)$.

(b) Donner la loi conjointe de (X, N).

(c) Déterminer la loi de X, et la reconnaître.

831.1

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \dfrac{\alpha}{n2^n}$.

(a) Déterminer α pour que la famille $(n, p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X.

(b) X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

(c) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire $Y = (\ln 2)X - 1$?

831.2

Soit $\lambda > 0$ et X un variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{\lambda}{n} P(X = n - 1)$$

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Déterminer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{X + 1}$.

831.3

On lance une pièce amenant pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, jusqu'à l'obtention de deux piles au total. On note X le nombre de faces alors obtenues.
Si $X = n$, on met $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire une boule au hasard. On note Y le numéro de la boule obtenue.

(a) Déterminer la loi de X. Calculer $\mathrm{E}(X)$.

(b) Déterminer la loi du couple (X, Y), et en déduire la loi de Y. Calculer $\mathrm{E}(Y)$.

(c) On définit la variable aléatoire $Z = X - Y$. Montrer que Y et Z sont indépendantes.

831.4

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, et modélisant le jeu de Pile ou Face infini, où $\mathsf{P} = 1$ et $\mathsf{F} = 0$. On s'intéresse à la longueur L_1 de la première séquence homogène, et à la longueur L_2 de la deuxième séquence homogène.
Par exemple :

$$(X_n(\omega))_{n\geqslant 1} = \big(\underbrace{\mathsf{P\,P\,P\,P}}_{L_1}\overbrace{\mathsf{F\,F\,F\,F\,F}}^{L_2}\mathsf{P\,P\,F\,F\,F\,P}\big)$$

Ici, la première séquence homogène a pour longueur $L_1(\omega) = 4$ et la deuxième $L_2(\omega) = 5$.

(a) Quelle est la loi de L_1 ? son espérance ?

(b) Déterminer la loi du couple (L_1, L_2).

(c) Calculer l'espérance de L_2.

840.1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit N une autre variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des X_i. On s'intéresse à :

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

On note qu'ici le nombre de termes dans la somme est la variable aléatoire N.

(a) Qu'est-il raisonnable de conjecturer quant à la valeur de $E(S)$?

(b) Justifier que S est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(c) Montrer que, pour $t \in [-1, 1]$:
$$G_S(t) = G_N(G_X(t))$$

(d) On suppose que N et X sont d'espérance finie. Établir :
$$E(S) = E(N)E(X)$$

(e) On lance une pièce honnête. Tant que l'on obtient « pile », on lance un dé et on avance son pion du nombre de cases correspondantes. De combien de case avance le pion en moyenne ?

Exercices du CCINP à travailler

0.2 CCINP 95

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.
Un joueur tire successivement, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

1. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font avec remise.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que l'on tire simultanément les 5 boules dans l'urne.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

0.3 **96**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = p_n$.
La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par :

$$G_X(t) = E[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$$

1. Prouver que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $S = X_1 + X_2$.
   Démontrer que $\forall t \in]-1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t)$:
   (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières ;
   (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice.

   Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
   On note S_n la somme des numéros tirés.
   Soit $t \in]-1, 1[$.
   Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

0.4 **97**

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P\left((X,Y) = (j,k)\right) = \frac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

0.5 — INP 98

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k|X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

0.6 — INP 99

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in L^2$.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall\, a \in]0,+\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application**
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

0.7 — INP 100

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.

4. X admet-elle une variance ? Justifier.

$\boxed{\textbf{0.8}}$ **INP 102**

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.

2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \underset{1 \leqslant i \leqslant N}{\text{Min}}(X_i)$
   c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \text{Min}\left(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)\right)$, Min désignant « le plus petit élément de ».

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.

   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

$\boxed{\textbf{0.9}}$ **INP 103**

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0, +\infty[)^2$.
   Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2. Soit $p \in]0, 1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
   Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.

$\boxed{\textbf{0.10}}$ **INP 104**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.

2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.

(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

0.11 CCINP **106**

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = P(Y=k) = pq^k$ où $p \in \,]0,1[$ et $q = 1-p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \mathrm{Sup}(X,Y)$ et $V = \mathrm{Inf}(X,Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(V=n) = pq^{2n}(1+q)$.
3. Prouver que $W = V+1$ suit une loi géométrique.
   En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

0.12 CCINP **108**

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X,Y) est donnée par :
$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.

0.13 CCINP **109**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

0.14 CCINP **110**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X=n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
   On pose $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé de $[-1,1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X=k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.

0.15 CCINP 111

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in]0,1[$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) est donnée par :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=k) \cap (Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

0.16 CCINP 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.